Espaces vectoriels

Problème 1 :

Dans tout ce problème, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est indifféremment noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

Partie 1 :

Dans cette partie, a désigne un réel et on pose $F_a = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists b \in \mathbb{R}, u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $u \in F_a$. Il existe donc un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$. Démontrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in F_a$.

2. a) Déterminer F_1.
   b) Déterminer F_0.

✐ Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 0 et de 1.

3. Démontrer que F_a est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 1 \text{ et } y_n = a^n$$
Démontrer que $\{x, y\}$ est une famille libre de F_a. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5. Soit $u \in F_a$.
   a) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que : $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases}$.
   Exprimer λ et μ en fonction de u_0, a et b_u.
   b) Montrer par récurrence que, pour λ et μ définis à la question précédente, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$
   c) Que peut-on en conclure ?

6. Calculer la dimension de F_a et justifier le fait que :
$$\forall u \in F_a,\ u_n = \frac{b_u}{1-a} + (u_0 + \frac{b_u}{a-1})a^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
.

Partie 2 :

On note F l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe un couple (a, b) de réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = ax_n + b$. Autrement dit :
$$F = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, x_{n+1} = ax_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$$
On considère cette fois deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes respectifs u_0 et v_0, et les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}v_n + 5 \text{ et } v_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n + 7$$

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

1. a) Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

   b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et soit $M_\lambda = A - \lambda I_2$ où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux valeurs de λ réelles pour lesquelles le système homogène $M_\lambda \cdot X = 0$, noté (S_λ) n'admet pas une unique solution.

   On notera désormais λ_1 et λ_2 ces deux réels avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

   c) Résoudre chacun des systèmes (S_{λ_1}) et (S_{λ_2}) et montrer que leur ensemble de solution noté respectivement E_{λ_1} et E_{λ_2} peut s'exprimer sous la forme $\text{Vect}\{u_1\}$ et $\text{Vect}\{u_2\}$, où u_1 et u_2 ont leur première coordonnée égale à 1.

   d) On notera désormais P, la matrice de la famille (u_1, u_2), prise dans cet ordre.
      i. Justifier le fait que P est inversible et calculer P^{-1}.
      ii. Montrer que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on précisera.

2. a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n + B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   b) Soit $Y_n = \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ défini par $Y_n = P^{-1}X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $Y_{n+1} = DY_n + B_1$ où B_1 est une matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qu'on explicitera.

   c) En déduire que les suites c et d sont respectivement des suites de F_{-1} et F_2, espaces vectoriels définis dans la partie 1.

3. On pourra utiliser ici les résultats de la Partie 1 :

   a) Exprimer c_n et d_n en fonction de n, c_0 et d_0.

   b) Exprimer c_0 et d_0 en fonction de u_0 et v_0.

   c) En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Problème 2

On considère l'équation :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

1. Montrer grâce à un théorème d'analyse qu'elle admet trois racines réelles distinctes vérifiant :
$$-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$
2. Justifier la relation : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ puis en déduire les inégalités $|x_2| < |x_1| < |x_3|$ ☕

3. On considère l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout n entier naturel, la relation :
$$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$
   a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

   On admet désormais que $\dim E = 3$.

   b) Montrer que les suites de termes généraux x_1^n, x_2^n et x_3^n sont des éléments de E.

4. On considère le système (S) suivant :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 & = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 & = 1 \end{cases}$$
   a) Montrer qu'il admet une solution unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et déterminer λ_3. Vérifier en particulier qu'il est non nul.
   b) Expliciter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3).
5. On note a l'unique suite élément de E telle que :
$$a_0 = 0,\ a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 1$$
   a) Montrer par récurrence que la suite a est croissante et que, pour tout n supérieur ou égale à 2, a_n est strictement positif.
   b) Montrer que les suites de termes généraux respectifs x_1^n, x_2^n et x_3^n forment une base de E. En déduire qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que, pour tout n entier naturel, on ait :
$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$$
   c) On pose, pour $n \geq 2$:
$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
   Montrer que la suite b ainsi définie converge vers x_3.

6. *Application numérique :*

   Écrire une fonctionPython permettant de calculer et d'afficher à l'écran les valeurs de a_n et b_n pour une valeur de n qui sera demandée à l'utilisateur.
   Préciser les valeurs approchées à 10^{-2} près de b_n pour n variant de 2 à 20.