Devoir surveillé : Probabilités et Calcul matriciel

Le sujet se compose de trois problèmes. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\text{l'encadrement}}$ des résultats.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé au cours de l'épreuve.

Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de trois manières différentes la puissance n-ième d'une matrice.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Première méthode :
   a) Exprimer J^n en fonction de J pour tout entier naturel n.
   b) Déterminer deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$.
   c) Calculer M^n pour tout entier naturel n.

2. Deuxième méthode :
   a) Calculer $M^2 - \dfrac{5}{4}M + \dfrac{1}{4}I_3$ où I_3 désigne la matrice identité.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_n M + b_n I_3$.
   c) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n ; préciser a_0, a_1, b_0 et b_1.
   d) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; En déduire a_n et b_n en fonction de n et conclure sur M^n.

3. Troisième méthode : On pose $A_\lambda = M - \lambda I_3 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   a) Soit (S_λ) le système homogène $A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
      i. Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) n'admet pas une unique solution. On notera désormais λ_1 et λ_2 ces deux valeurs avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
      ii. Soit E_λ l'ensemble des solutions de (S_λ). Déterminer E_{λ_1} et E_{λ_2}.
   b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est constituée de 3 colonnes dont l'une est solution de E_{λ_1} et les deux autres sont solutions de E_{λ_2}. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   c) Calculer $D = P^{-1}MP$ ainsi que D^n pour tout entier naturel n.
   d) Démontrer par récurrence que $D^n = P^{-1}M^nP$ pour tout entier naturel n.
   e) En déduire l'expression de M^n.

Problème 2 :

On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois qu'on obtient un résultat différent de six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsqu'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

1. Pour k entier naturel non nul, soient A_k l'événement : « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé » et B_k l'événement : « obtenir le premier six au plus tard au k-ième lancer ».
   a) Soit S_k l'événement : « obtenir six au k-ième lancer ».
   Exprimer A_1 et plus généralement A_k pour $k \geq 2$ à l'aide des événements S_k.
   En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$.
   Vérifier que $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$.
   b) Montrer que la probabilité d'obtenir le premier six au plus tard au troisième lancer vaut :
   $$\mathbb{P}(B_3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$$
   c) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?
   d) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k$-ième lancer ?

2. On appelle B l'événement : « On a obtenu une boule blanche ».
   a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la k-ième fois ?
   b) En déduire $\mathbb{P}(B \cap A_k)$.
   c) On souhaite estimer la probabilité d'obtenir une boule blanche à l'issue de l'expérience décrite ci-dessus. Compléter la fonction `tiragesUrnes(tmax)` afin qu'elle retourne 1 si on obtient une boule blanche et 0 sinon (l'expérience pouvant se poursuivre indéfiniment, on décide d'arrêter les lancers de dé après l'obtention de `tmax` boules rouges dans l'urne). C'est cet entier `tmax` supposé grand qui est fourni en paramètre d'entrée.

```
def tiragesUrne2(tmax):
    succes = 0 # 0 si pas de blanche lors du tirage dans l'urne
    b = 1 # nombre de blanches au début
    r = ...
    Six = 0 # aucun six n'est encore obtenu
    while Six == ... and r ...:
       if rdm.randint(..,...) ....:
          Six = 1
       else:
          ...
    if Six == 1 and rdm.random() ...:
       succes = ...
    return succes
```

   d) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `EstimeProbaBlanche` de paramètres `m` et `tmax` qui réalise m fois l'expérience et renvoie la proportion des expériences où une boule blanche a été obtenue.

e) On souhaite montrer que la série $\sum \frac{x^k}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$

i. Montrer que $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}dt$ et en déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt$

ii. Justifier que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt$.

iii. Conclure.

f) Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Problème 3 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A, d'affixe 1, B d'affixe $e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et C d'affixe $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.
Par convention, au regard du sens trigonométrique, on dira que B *suit* A, que C suit B et que A suit C ou encore que A *précède* B, B précède C, C précède A.

Un point mobile M parcourt aléatoirement le triangle ABC de la façon suivante :
Au départ le mobile est en A.
Si à l'instant n il se trouve sur l'un des sommets du triangle, alors à l'instant $(n+1)$ il sera :

- ➤ au sommet suivant avec la probabilité p.
- ➤ au sommet précédent avec la probabilité q.
- ➤ au même sommet avec la probabilité r.

Il est admis que p, q et r sont trois réels positifs vérifiant : $p+q+r=1$.

Étant donné un sommet quelconque S du triangle, on désigne par S_n l'événement : « à l'instant n le point M se trouve en S » et par $\mathbb{P}(S_n)$ la probabilité de cet événement.
L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement du point M lorsque n tend vers l'infini, dans quelques cas particuliers, puis dans le cas général.

I/ Questions préliminaires

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_0)$, $\mathbb{P}(B_0)$ et $\mathbb{P}(C_0)$.

2. Représenter le triangle ABC et calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(C_1)$.

3. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$

4. Déterminer $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.

5. On pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$. Démontrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n + rc_n \end{cases}$$

6. Calculer a_2, b_2 et c_2.

II/ Etude informatique : modélisation de l'évolution du mobile au cours du temps

1. On prend pour convention que la position du mobile vaut 0 s'il est en A, 1 s'il est en B et 2 s'il est en C. On considère les listes `Td=[1,2,0]` et `Ti=[2,0,1]`.
   Si `pos=i` où $i \in [\![0,2]\!]$. Utiliser les listes `Td` et `Ti` pour obtenir sa position au pas de temps suivant selon qu'il se déplace dans le sens trigonométrique ou pas.

2. Écrire une fonction `deplacement(p,q,n)` qui retourne sous forme d'un entier compris entre 0 et 2 la position du mobile à l'instant $t = n$ (en supposant toujours qu'il part de A) et affiche à l'écran la phrase : « `le mobile est en ... à l'instant t = n` ».
   ✐ On pourra utiliser la fonction `rdm.random()`.

3. Écrire une fonction `arriveEnC(p,q)` qui retourne le nombre de pas nécessaire pour rejoindre le point C. Comment estimer l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre de pas pour atteindre C ?

4. Écrire une fonction `estimProba(m,n)` permettant d'estimer la probabilité d'être respectivement en A, B et C à l'instant $t = n$ en retournant une liste `[pA,pB,pC]` formée des fréquences respectives des positions A, B et C à l'issue de `m` répétitions de l'expérience.

III/ Étude du cas $p = q$ avec $p \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$ et $r = 1 - 2p$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = M \cdot X_n$ où $M = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
2. Une matrice est dite stochastique si la somme des termes dans chacune de ses colonnes vaut 1.
   a) Donner un argument probabiliste qui justifie que M est une matrice stochastique.
   b) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que leur produit est encore une matrice stochastique.
3. Au regard des hypothèses, on écrit désormais $M = \begin{pmatrix} 1-2p & p & p \\ p & 1-2p & p \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$.

   a) Montrer qu'il existe deux valeurs réelles de λ pour lesquelles le système (S_λ) : $(M - \lambda I_3) \cdot X = 0$, où I_3 désigne la matrice identité, n'admet pas une unique solution.
   b) Soient λ_1 et λ_2 les deux valeurs obtenues précédemment, avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
   Résoudre (S_{λ_1}) et (S_{λ_2}).
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que cette matrice est formée de colonnes solutions de (S_{λ_1}) et (S_{λ_2}).
   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

5. Calculer la matrice $M' = P^{-1}MP$.

6. Exprimer M en fonction de P, P^{-1} et M'. En déduire que $M^n = PM'^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.
7. Montrer que : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et conclure sur une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n et de p.

8. Que peut-on dire du comportement du point en l'infini ? Comment utiliser vos fonctions Python, écrites dans la partie II, pour valider votre réponse ?

Exercice supplémentaire :

✐ *A ne traiter que si aucune question ne peut plus être abordée sur les problèmes qui précèdent.*

Soit un nombre réel $p \in]0,1[$. On réalise une suite de lancers d'une pièce, chaque lancer amenant « pile » avec la probabilité p ou « face » avec la probabilité $q = 1-p$. Pour tout entier naturel k non nul, soit l'événement A_k : « on obtient pour la première fois Pile suivi de Face aux lancers k et $k+1$ ».

① Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$.

② A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\mathbb{P}(A_k) = q \cdot \mathbb{P}(A_{k-1}) + p^k q$.

③ En faisant intervenir la suite (u_k) définie, pour tout entier $k \geq 2$, par $u_k = \dfrac{\mathbb{P}(A_k)}{q^k}$, déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1.

④ Vérifier que les A_k forment un système quasi-complet d'événements.