4 T.P. Équations différentielles.

Objectif

L'objectif est d'aborder d'un point de vue numérique les équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2 à coefficients constants qui sont au programme de BCPST1 mais plus généralement les équations différentielles d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), qu'elles soient linéaires ou non, ainsi que des applications classiques prises dans le champ des sciences physiques et des sciences de la vie.

1 Les équations différentielles d'ordre 1 - Le zoo des méthodes.

1.1 Introduction

Voici des exemples d'équations différentielles du premier ordre, certains élémentaires, d'autres glanés dans les sujets du concours Agro-Véto :

$$\begin{cases} y'(t) & = y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y'(t) & = -3y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} (1+t)y'(t) + y(t) & = 0, t \in]-1, +\infty[\\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) & = \dfrac{1}{1+e^t}, t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = \ln(2) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y'(t) - \dfrac{y(t)}{4} & = \cos(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y'(t) & = 2y(t) - y^2(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

Toutes peuvent se mettre, selon les cas, sous la forme générale

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) & = f(y(t)), t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}} \ (E_1) \text{ ou } \boxed{\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)), \quad t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}} \ (E_2)$$

où $y_0 \in J$ représente la condition à l'origine et $f \in \mathcal{C}^1(J)$ pour (E_1), $f \in \mathcal{C}^1(I \times J)$ pour (E_2), est spécifique à chaque équation.

On dira que pour tout $(t_0, y_0) \in I \times J$, $y : I \to \mathbb{R}$ est une solution sur I de l'équation différentielle si y est dérivable sur I et $y'(t) = f(y(t))$ ou $y'(t) = f(t, y(t))$ selon les cas, avec $y(t_0) = y_0$.

On admettra que la solution au problème ainsi posé existe en tant que fonction définie sur I et qu'elle est unique. Pour autant, dans la plupart des cas, on ne sait pas déterminer explicitement cette solution et nous allons donc mettre en place des méthodes numériques permettant d'approcher la solution de telles équations.

1.2 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = f(y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

Cette méthode repose sur l'idée simple que, puisque la solution cherchée est dérivable sur I, on a pour h suffisamment petit :

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \cong y'(t) \text{ ou encore } y(t+h) \cong y(t) + h \cdot y'(t)$$

On pouvait aussi dire qu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 et donc :

$$\forall t \in I, \ y(t+h) = y(t) + h \cdot y'(t) + \circ(h)$$

Dès lors, partant du point (t_0, y_0), on suit la droite de pente $y'(t_0) = f(y_0)$ sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + h]$. On pose alors :

$$\begin{cases} t_1 &= t_0 + h \\ y_1 &= y_0 + h \cdot f(y_0) \end{cases}$$

Ensuite, en partant du point (t_1, y_1), on suit la droite de pente $y'(t_1) = f(y_1)$ sur l'intervalle de temps $[t_1, t_1 + h]$, etc.

On construit ainsi une suite de points de façon récurrente en posant :

$$\forall n \in [\![0, N]\!], \begin{cases} t_{n+1} &= t_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(y_n) \end{cases}$$

La ligne brisée joignant les points $\{(t_n, y_n), k \in [\![0, N]\!]\}$ donnera une solution approchée de l'équation différentielle.

Mise en oeuvre : On considère une subdivision de I, suite de points $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = t_0 + nh \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et h est un réel strictement positif qu'on pourra choisir aussi petit qu'on le souhaite.

Si y est la solution de (E_1) alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y'(t_n) = f(y(t_n))$ et donc, pour h petit :

$$\forall t_n \in I,\ y(t_{n+1}) \cong y(t_n) + h \cdot y'(t_n) = y(t_n) + h \cdot f[y(t_n)]$$

conclusion : Pour avoir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, on considère la suite (y_n) définie par son premier terme y_0 (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{cases} t_{n+1} &= t_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(y_n) \end{cases}$$

Exercice 1.2 :

① Considérons l'équation différentielles $(Eq1)$: $y'(t) = y(t)$, avec $y(0) = 1$ dont la solution exacte est : ...

a. Écrire une fonction `euler_explicite()` permettant de tracer le graphe sur l'intervalle $I = [0, 2]$ d'une approximation numérique de la solution cherchée.

b. On souhaite estimer l'erreur commise en approchant le nombre dérivé par un taux d'accroissement. En appliquant la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0, 1]$,comparer la valeur estimée à $t = 1$ à e^1 en retournant le logarithme décimal l'erreur commise `err = y(1)-exp(1)` pour des valeurs de h prises dans l'ensemble $\{10^{-k}, k \in [\![1, 6]\!]\}$.

1.3 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

On généralise la méthode précédente en écrivant que pour obtenir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, on considère la suite (y_n) définie par son premier terme y_0 (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{cases} t_{n+1} &= t_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \end{cases}$$

Exercice 1.3 :

① Écrire une fonction `euler_expliciteG()` permettant de tracer le graphe sur l'intervalle $I = [0, 2]$ d'une approximation numérique de la solution cherchée.

② En faire l'application à $\begin{cases} (1+t)y'(t)+y(t) & = 0, t \in]-1,+\infty[\\ y(0) & = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} y'(t)+y(t) & = \dfrac{1}{1+e^t}, t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = \ln(2) \end{cases}$.

Confrontez graphiquement vos solutions aux solutions exactes.

③ On considère l'équation différentielle (Eq_3) : $y'(t) = \dfrac{3}{t}y(t) - \dfrac{5}{t^3}$ avec $y(1) = 1$. Tracer sur une même figure le graphe de la solution exacte sur $\mathbb{R}_+^*$ et de sa solution numérique par méthode d'Euler. Que constatez-vous ? Le justifier.

✐ On dira dans ce cas que le problème est *mal posé.*

1.4 La méthode d'Euler implicite pour $y'(t) = f(y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

Il existe une autre façon d'introduire la méthode d'Euler explicite qui repose sur une approche intégrale. En effet :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[y(t)]dt$$

Dès lors, par la méthode des rectangles « à gauche » on retrouve la méthode d'Euler explicite puisque :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f[y(t)]dt \cong (t_{n+1}-t_n)f(y(t_n)) \text{ et donc } \boxed{y_{n+1} \approx y_n + h \cdot f(y_n)}$$

Mais il est aussi possible d'approcher cette intégrale par la méthode des rectangles « à droite »... Dès lors :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f[y(t)]dt \cong (t_{n+1}-t_n)f(y(t_{n+1})) \text{ et donc } \boxed{y_{n+1} \approx y_n + h \cdot f(y_{n+1})}$$

On parle de méthode d'Euler *implicite* puisque y_{n+1} n'étant pas connu, il s'agit de résoudre au préalable une équation pour calculer y_{n+1} connaissant y_n.

Exercice 1.4 :

① En considérant l'équation (Eq_2) : $y'(t) = -3y(t)$, $y(0) = 2$, déterminer les valeurs de h qui assurent la stabilité de la solution.

② Appliquer la méthode d'Euler implicite à la recherche d'une solution numérique approchée de (Eq_2) sur $[0, 2]$ et la tracer. Faire varier les valeurs de h et vérifier ainsi la stabilité de la solution obtenue.

1.5 La méthode des trapèzes pour $y'(t) = f(y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

Poursuivant sur la même idée, il est possible d'appliquer la méthode d'intégration dite « des trapèzes ». Alors :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f[y(t)]dt \cong (t_{n+1}-t_n)\frac{f(y_n)+f(y_{n+1})}{2} \text{ et donc } \boxed{y_{n+1} \cong y_n + h \cdot \frac{f(y_n)+f(y_{n+1})}{2}}$$

On parle de méthode des trapèzes, méthode qui peut être considérée comme explicite si on utilise dans un premier temps la méthode d'Euler explicite pour évaluer y_{n+1}.

Exercice 1.5 :

① Écrire une fonction `trapeze(h,y0,t0,tf)` permettant d'obtenir une solution approchée de l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t))$, $y(t_0) = y_0$ à l'aide des méthodes d'Euler et des trapèzes.

② Mettre en pratique la méthode des trapèzes pour approcher la solution de l'équation (Eq_2) sur $[0, 1]$ selon différentes valeurs de h.

Exercice 1.6 : Application à une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 :

On considère l'équation :

$$y'(t) = 2y(t) - y^2(t), \text{ avec } y(0) = 1$$

① Vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{1 + e^{-2t}}$ est solution de cette équation.

② Utiliser les méthode Euler explicite et des trapèzes pour donner une solution approchée de cette équation.
✐ On complétera pour ça la fonction Python `ExpleED1_NL()`.

2 Équations différentielles d'ordre supérieur

2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle : $\begin{cases} y'' + ay' + by & = 0 \\ y(0) = y_0, y'(0) & = v_0 \end{cases}$ (E).

On considère la matrice colonne $Y(t)$ définie par : $Y(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

On obtient alors par dérivation :

$$(E) \Leftrightarrow Y'(t) = \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A.Y(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'équation est devenue matricielle.

En utilisant la notation usuelle : $v(t) = y'(t)$, on a donc :

$$\begin{cases} v'(t) & = -av(t) - by(t) \\ y'(t) & = v(t) \end{cases}, \text{ où } y(0) = y_0 \text{ et } v(0) = v_0$$

Ce qui permet d'envisager de le résoudre par l'une quelconque des méthodes vues dans le premier paragraphe.

① **Approximation numérique par la méthode d'Euler explicite :**

$$\begin{cases} v(t+h) & = v(t) + hv'(t) = \\ y(t+h) & = y(t) + hy'(t) = \end{cases}$$

On en déduit une forme récurrente facile à programmer puisque, y_0 et v_0 étant connus :

$$\boxed{\begin{cases} v_{n+1} & = (1 - ah)v_n - bhy_n \\ y_{n+1} & = hv_n + y_n \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 - ah & -bh \\ h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}}$$

② **Approximation numérique par la méthode d'Euler implicite :**

$$\begin{cases} v(t+h) & = v(t) + hv'(t+h) = \\ y(t+h) & = y(t) + hy'(t+h) = \end{cases}$$

On en déduit la forme récurrente suivante :

$$\begin{cases} (1 + ah)v_{n+1} + bhy_{n+1} & = v_n \\ -hv_{n+1} + y_{n+1} & = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 + ah & bh \\ -h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice associée au système étant inversible puisque son déterminant est non nul, on en déduit :

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\qquad} \begin{pmatrix} \qquad & \qquad \\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ y_n \end{pmatrix}}$$

③ **Approximation numérique par la méthode des trapèzes :**

$$\begin{cases} v(t+h) &= v(t) + h\dfrac{v'(t)+v'(t+h)}{2} \\ y(t+h) &= y(t) + h\dfrac{v(t)+v(t+h)}{2} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} v(t+h) &= v(t) + h\dfrac{-av(t)-by(t)-av(t+h)-by(t+h)}{2} \\ y(t+h) &= y(t) + h\dfrac{v(t)+v(t+h)}{2} \end{cases}$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{ah}{2}\right)v_{n+1} + \dfrac{bh}{2}y_{n+1} &= \left(1-\dfrac{ah}{2}\right)v_n - \dfrac{bh}{2}y_n \\ -\dfrac{h}{2}v_{n+1} + y_{n+1} &= \dfrac{h}{2}v_n + y_n \end{cases}$$

Qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1+\dfrac{ah}{2} & \dfrac{bh}{2} \\ -\dfrac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{ah}{2} & -\dfrac{bh}{2} \\ \dfrac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dès lors, sous réserve que la matrice du terme de gauche de l'égalité soit inversible, il est possible d'exprimer v_{n+1} et y_{n+1} en fonction de v_n et y_n.

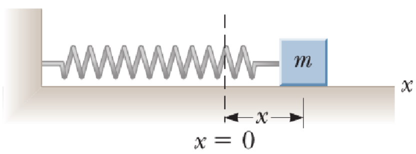
2.2 Équations linéaires d'ordre 2 : mise en pratique.

① Soit l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

a. Donner sa solution et la tracer sur l'intervalle $I = [0, 3]$.
b. Compléter les fonctions Python `simulSolutionEe(y0,v0)`, `simulSolutionEs(y0,v0)` et `simulSolutionTrapezes(y0,v0)` ou `simulSolutionTrapezesMatricielle(y0,v0)` selon, au choix, qu'on privilégie la méthode par prédiction-correction ou la méthode matricielle.
c. Confrontez graphiquement vos solutions approchées à la solution exacte.

② **Exemple de l'oscillateur harmonique :**

On suppose un point matériel de masse m attaché à un ressort horizontal, sans masse, de raideur k et de longueur au repos l_0. Le système est supposé en équilibre à la position l_e.



A l'instant initial, la masse est déplacée, sans vitesse, d'une longueur x_0 par rapport à la position d'équilibre. Alors, si $x(t)$ désigne l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre à l'instant t, on a dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\ddot{x}^2 + \omega^2 x = 0 \text{ où } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

On prendra : $x_0 = 0.1m$, $\dot{x}(0) = 0$ et $\omega = 10$ rad.s^{-1}

a. Rappeler quelle est la solution analytique de cette équation.

b. Appliquer les fonctions Python précédentes pour confronter les solutions approchées et la solution analytique de cette équation et tracer la trajectoire de phase. Commenter ces graphiques.

c. Justification : On s'intéresse à l'énergie du système qui, à l'instant t, est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{m}{2}\left(v^2(t) + \omega^2 x^2(t)\right)$$

Il est facile de vérifier par dérivation que l'énergie est une constante du mouvement... Or ce n'est pas tout à fait le cas pour lorsqu'on approche v et x par les méthodes précédentes.

En effet $E_{n+1} = \frac{m}{2}\left(v_{n+1}^2 + \omega^2 x_{n+1}^2\right)$ et en remplaçant par les expressions obtenues en 4.b) on obtient respectivement :

- Pour Euler explicite : $E_{n+1} = (1 + \omega^2 h^2)E_n$.
- Pour Euler implicite : $E_{n+1} = \dfrac{1}{1 + h^2\omega^2}E_n$.
- Pour la méthode des trapèzes : $E_{n+1} = E_n$.
  En effet, on montrera que :

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \dfrac{h^2\omega^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{h^2\omega^2}{4} & -h\omega^2 \\ h & 1 - \dfrac{h^2\omega^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

2.3 Exemple d'une équation différentielle d'ordre 3 :

Pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y.
Considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_3') \;\; y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, et x un nombre réel.

Notons : $Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que : $Y' = AY$.

② On pose $v(x) = y'(x)$ et $a(x) = y''(x)$. Écrire une fonction Python permettant de résoudre numériquement, par la méthode de votre choix, l'équation différentielle (ε_3') ci-dessus.
On prendra pour l'application numérique : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0 = y''(0)$.