CORRECTION
Probabilités et calcul matriciel (3H00)

Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de trois manières différentes la puissance n-ième d'une matrice.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Première méthode :

   a) *Exprimons J^n en fonction de J pour tout entier naturel n :*
   Un calcul rapide montre que $J^2 = 3J$.
   On va montrer par récurrence que $J^n = 3^{n-1}J$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   – $J^1 = J = 3^0 J$ suffit à initialiser cette récurrence pour $n = 1$.
   – On suppose que $J^n = 3^{n-1}J$ pour un entier $n \geq 1$.
   – Alors $J^{n+1} = J^n J = 3^{n-1}J^2 = 3^{n-1}3J = 3^n J$. Ce qui prouve l'hérédité de la relation.

   Conclusion : $\boxed{J^n = 3^{n-1}J,\ \forall n \geq 1 \text{ et } J^0 = I}$

   b) *Déterminons deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$:*

   $$M = aI + bJ \Leftrightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}$$

   Or deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
   On obtient donc le système : $\begin{cases} a+b & = 1/2 \\ b & = 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{4}$.

   Conclusion : $\boxed{M = \dfrac{1}{4}I + \dfrac{1}{4}J}$; *Rque* : on pouvait aussi noter directement que $4M = I + J$

   c) *Calculons M^n pour tout entier naturel n :*
   Si $n = 0$, $M^n = M^0 = I$.
   Sinon, la relation précédente nous invite à utiliser la formule du binôme de Newton, ce qui est possible car I et J commutent.
   Alors, $\forall n > 0$:

   $$M^n = \left(\frac{1}{4}I + \frac{1}{4}J\right)^n = \frac{1}{4^n}(I+J)^n = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k$$

   On utilise alors le résultat de la question 1. en prenant soin de distinguer le cas $k = 0$.
   Dès lors :

   $$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{4^n}\left[\binom{n}{0}J^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k\right] = \frac{1}{4^n}\left[I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J\right] \\ &= \frac{1}{4^n}\left[I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k\right)J\right] = \frac{1}{4^n}\left[I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k - 1\right)J\right] \\ &= \frac{1}{4^n}\left(I + \frac{4^n - 1}{3}J\right) = \frac{1}{4^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)J \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{M^n = I \text{ si } n=0 \text{ et } M^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{2}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} \\ 1-\dfrac{1}{4^n} & 1+\dfrac{2}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} \\ 1-\dfrac{1}{4^n} & 1-\dfrac{1}{4^n} & 1+\dfrac{2}{4^n} \end{pmatrix} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*}$

2. Deuxième méthode :

   a) Après calculs... on obtient : $\boxed{M^2 - \dfrac{5}{4}M + \dfrac{1}{4}I = 0}$

   b) *Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$:*

   – *Initialisation* : La propriété est vraie pour $n = 0$ car $M^0 = I = 0M + 1I$. On a dans ce cas $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   – On suppose la propriété vraie au rang n. C'est-à-dire $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = a_nM + b_nI$.
   – *Hérédité* :

   $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (a_nM + b_nI) \times M = a_nM^2 + b_nM \\ &= a_n\left(\frac{5}{4}M - \frac{1}{4}I\right) + b_nM = \left(\frac{5}{4}a_n + b_n\right)M - \frac{1}{4}a_nI \end{aligned}$$

   En posant $a_{n+1} = \dfrac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n$ on prouve l'existence de deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

   – ***Conclusion*** : $\boxed{\text{La propriété est vraie pour tout entier naturel } n}$

   c) D'après ce qui précède, on a $a_{n+1} = \dfrac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   On sait déjà que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
   Comme $M^1 = 1.M + 0.I$ on en déduit que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

   d) *Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre* 2 : La question précédente permet d'assurer que : $a_{n+2} = \dfrac{5}{4}a_{n+1} + b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   D'où, sachant que pour tout entier naturel n : $b_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n$, on a :

   $$a_{n+2} = \frac{5}{4}a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   Conclusion : $\boxed{(a_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

   Son équation caractéristique et : $r^2 - \dfrac{5}{4}r + \dfrac{1}{4}$ dont les racines sont les mêmes que celles de l'équation $4r^2 - 5r + 1 = 0$, c'est-à-dire $r = 1$ et $r = \dfrac{5}{4}$.

   D'où $a_n = \lambda 1^n + \mu\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Les conditions à l'origine permettent d'obtenir le système $\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda + \dfrac{1}{4}\mu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = \dfrac{4}{3} \\ \mu & = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

   Dès lors :

$$a_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } b_n = -\frac{1}{4}a_{n-1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] \times I\\
&= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] \times I\\
&= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} + \left[-1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] \times I\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \times \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} + \left[-1 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right] \times I\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n}\\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n}\\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n}\end{pmatrix} \text{ si } n \in \mathbb{N}}$

3. Troisième méthode : On pose $A_\lambda = M - \lambda I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2-4\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-4\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-4\lambda\end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Soit (S_λ) le système homogène $A_\lambda \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

      i. (S_λ) n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée A_λ n'est pas inversible ou encore si et seulement si $\text{rg}(A_\lambda) < 3$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}A_\lambda &= \text{rg}\begin{pmatrix}2-4\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-4\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-4\lambda\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-4\lambda\\ 1 & 2-4\lambda & 1\\ 2-4\lambda & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}(L_3)\\ (L_2)\\ (L_1)\end{matrix}\\
&= \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-4\lambda\\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda)\\ 0 & -1+4\lambda & 1-(2-4\lambda)^2\end{pmatrix} \begin{matrix}(L_1)\\ (L_2 - L_1)\\ (L_3 - (2-4\lambda)L_1)\end{matrix}
\end{aligned}$$

avec $1 - (2-4\lambda)^2 = [1 - (2-4\lambda)][1 + (2-4\lambda)] = (4\lambda - 1)(3 - 4\lambda)$.
D'où :

$$\begin{aligned}
\text{rg}A_\lambda &= \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-4\lambda\\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda)\\ 0 & -1+4\lambda & (4\lambda-1)(3-4\lambda)\end{pmatrix}\\
&= \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-4\lambda\\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda)\\ 0 & 0 & P(\lambda)\end{pmatrix} \begin{matrix}(L_1)\\ (L_2)\\ (L_3 + L_2)\end{matrix}
\end{aligned}$$

avec $P(\lambda) = (1-4\lambda)(4\lambda-3) - (1-4\lambda) = (1-4\lambda)(4\lambda-3-1) = 4(1-4\lambda)(\lambda-1)$.

En conséquence, $\text{rg}A_\lambda < 3 \Leftrightarrow 1-4\lambda = 0$ ou $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1-4\lambda = 0$ où $\lambda - 1 = 0$.

Conclusion : $\boxed{(S_\lambda) \text{ n'est pas de Cramer si } \lambda = \lambda_1 = 1 \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = \dfrac{1}{4}}$

ii. Soit E_λ l'espace vectoriel solution de (S_λ) dans chacun de ces deux cas.

Par définition, $E_{\lambda_1} = E_1 = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 / A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (S_1)\}$

D'après ce qui précède, en prenant $\lambda = 1$, on obtient :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ -3y+3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= z \\ x &= z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1,1,1)\}}$

Par définition, $E_{\lambda_2} = E_{\frac{1}{4}} = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 / A_{\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (S_{\frac{1}{4}})\}$

D'après ce qui précède, en prenant cette fois $\lambda = \dfrac{1}{4}$, on obtient :

$(S_{\frac{1}{4}}) \Leftrightarrow x+y+z = 0 \Leftrightarrow z = -y-z, \ \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$

Conclusion : $\boxed{E_{\frac{1}{4}} = \{(-y-z,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}}$

b) *Soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrons que P est inversible et calculer P^{-1} :*

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

P est inversible si et seulement si le système associé $PX = X'$ est un système de Cramer.
On aura alors $X = P^{-1}X'$.

$$PX = X' \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z &= x' \\ x+z &= y' \\ x+y &= z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y'-x & (L_2) \\ y = z'-x & (L_3) \\ xy - z = x - z' + x - y' + x = x' & (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{1}{3}(x'+y'+z') \\ y &= z' - \dfrac{1}{3}(x'+y'+z') = \dfrac{1}{3}(-x'-y'+2z') \\ z &= y' - \dfrac{1}{3}(x'+y'+z') = \dfrac{1}{3}(-x'+2y'-z') \end{cases}$$

L'unicité de la solution prouve qu'il s'agit bien d'un système de Cramer.

Conclusion : $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

c) *Calculons $D = P^{-1}MP$ ainsi que D^n pour tout entier naturel n :*
Un calcul rapide donne :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = D}$

On montre alors par une récurrence immédiate que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}}$$

d) *Démontrons par récurrence que $D^n = P^{-1}M^nP$ pour tout entier naturel n :*

- La relation est vraie pour $n = 0$ puisque $D^0 = I = P^{-1}IP$ et vraie pour $n = 1$ d'après la question 3.c)
- Supposons la vraie pour un entier $n \geq 0$.
- Alors $D^{n+1} = D^n \cdot D = P^{-1}M^nP \cdot P^{-1}MP = P^{-1}M^nIMP = P^{-1}M^{n+1}P$.
  Ce qui prouve l'hérédité de cette relation.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = P^{-1}M^nP}$

e) De l'égalité précédente, on tire en multipliant à gauche par P, à droite par P^{-1} :
$\forall n \in \mathbb{N},\ PD^nP^{-1} = PP^{-1}M^nPP^{-1} = M^n$.

On obtient dès lors aisément :
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} \end{pmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N}}$

Problème 2 :

1. Pour k entier naturel non nul, soit A_k l'événement : « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé »et B_k l'événement : « obtenir le premier six au plus tard au k-ième lancer.

   a) *Calculons $\mathbb{P}(A_k)$ et vérifions que $\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k)=1$:*
   Soit S_k l'événement : « obtenir six au k-ième lancer »
   On a alors $\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(S_1)=\dfrac{1}{6}$.
   Plus généralement :
   $$\mathbb{P}(A_k)=\mathbb{P}(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\cdots\cap\overline{S_{k-1}}\cap S_k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$$
   car les épreuves sont indépendantes et donc les événements associés sont mutuellement indpts.
   Dès lors, $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(A_k)$ est une série géométrique convergente puisque $1/6\in]0,1[$ et :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{j}=\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=1$$

   b) Déterminons la probabilité d'avoir obtenu le **premier** six au plus tard au troisième lancer :
   Deux raisonnements sont possibles :

   - On décrit l'événement : $\mathbb{P}(B_3)=\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup A_3)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)$
     car les événements sont incompatibles. D'où :
     $$\mathbb{P}(B_3)=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$$
     On reconnaît la somme des trois premiers termes d'une suite géométrique de raison $q=\dfrac{5}{6}$.
     Donc $\mathbb{P}(B_3)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1-(5/6)^3}{1-5/6}=\boxed{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^3}$
   - On passe par l'événement contraire : « n'obtenir aucun six sur les trois premiers lancers ».
     $$\mathbb{P}(B_3)=1-\mathbb{P}(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\overline{S_3})=1-\mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}(\overline{S_2})\mathbb{P}(\overline{S_2})=\boxed{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}$$
     car les épreuves étant indépendantes les événements associés sont mutuellement indépendants.

   c) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le **premier** six au plus tard au k-ième lancer ?
   Le plus rapide est là aussi de passer par l'événement contraire.
   On obtient :
   $$\mathbb{P}(B_k)=1-\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{k}\overline{S_i}\right)=1-\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(\overline{S_i})=\boxed{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k}$$
   Car les événements sont mutuellement indépendants.

   d) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k$-ième lancer ? Il s'agit de déterminer : $\mathbb{P}_{B_{2k}}(\overline{B_k})=\dfrac{\mathbb{P}(\overline{B_k}\cap B_{2k})}{\mathbb{P}(B_{2k})}$

$$\mathbb{P}_{B_{2k}}(\overline{B_k}) = \frac{\mathbb{P}(A_{k+1} \cup ... \cup A_{2k})}{\mathbb{P}(B_{2k})} = \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{2k} \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B_{2k})} \text{ car événements incompatibles.}$$

Donc

$$\mathbb{P}_{B_{2k}}(\overline{B_k}) = \frac{\frac{1}{6}\sum\limits_{i=k+1}^{2k}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}} = \frac{1}{6}\frac{\sum\limits_{j=k}^{2k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{j}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}} = \frac{1/6}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1-k+1}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right)\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right)}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right) = \boxed{\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{k}}{\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\right)}}$$

2. On appelle B l'événement : « On a obtenu une boule blanche ».
   a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné six, l'urne avant qu'on ne lance le dé pour la k-ième fois contient une boule blanche et $k-1$ boules rouges.

   b) Dès lors : $\mathbb{P}(B \cap A_k) = \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\dfrac{1}{6}$.

   c) *Complétons la fonction* `tiragesUrnes(tmax)` *afin qu'elle retourne* 1 *si on obtient une boule blanche avant* `tmax` *rouges et* 0 *sinon.*

   La fonction qu'il s'agit de compléter suit pas à pas les étapes de l'expérience aléatoire.
   b et r désignent respectivement le nombre de boules blanches et rouges dans l'urne. b restera constant égale à 1 tout au long de l'expérience tandis que r augmente de 1 à chaque fois que le dé retourne un numéro différent de 6, ce qu'on modélise aux lignes 7 et 10.
   Si le dé amène 6 (ligne 8) alors on effectue un tirage dans l'urne qui contient une blanche et r rouges (soit $r+1$ boules). La probabilité de tirer une blanche vaut donc $b/(r+1)$, ce qu'on teste à la ligne 11. Soit :

```
1 def tiragesUrne2(tmax):
2     succes = 0 # 0 si pas de blanche lors du tirage dans l'urne
3     b = 1 # nombre de blanches au début
4     r = 0 # nombre de rouges au début
5     Six = 0 # aucun six n'est encore obtenu
6     while Six == 0 and r <= tmax:
7        if rdm.randint(1,6) == 6: # si obtient '6' avec le dé
8           Six = 1
9        else:
10          r += 1 # On ajoute une rouge dans l'urne
11    if Six == 1 and rdm.random() <= b/(r+1):
12       succes = 1
13    return succes
```

d) *Utilisons la fonction précédente pour écrire une fonction* `EstimeProbaBlanche` *de paramètres* `m` *et* `tmax` *qui réalise m fois l'expérience et renvoie la proportion des expériences où une boule blanche a été obtenue :*
Il suffit d'appeler m fois la fonction `tiragesUrnes(tmax)` et d'ajouter `succes` qui vaut 1 à chaque fois que l'expérience s'achève par le tirage d'une boule blanche et 0 sinon.

Une première rédaction possible est la suivante :

```
def EstimeProbaBlanche(m,tmax):
    CompteSucces = 0
    for i in range(m):
       succes = tiragesUrne(tmax)
       CompteSucces += succes
    return CompteSucces/m
```

Une rédaction plus concise peut s'écrire ainsi :

```
def EstimeProbaBlanche(m,tmax):
   L = [tiragesUrne(tmax) for i in range(m)] # L est formée de 0 et de 1
   return L.count(1)/m
```

e) On souhaite montrer que la série $\sum \frac{x^k}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$

i. Montrons que $S_n = \frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}dt$ pour en déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt$:

$$\int_0^x t^{k-1}dt = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \frac{x^k}{k}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}dt \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

Conclusion : $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt}$

(somme des n premiers termes d'une suite géométrique)

ii. *Justifions que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt$:*

Pour $x \in [0,1[$, $0 \leq x < 1 \Rightarrow 1-t \geq 1-x > 0$ et donc $\frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$

On en déduit $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt$ car les bornes de l'intégrale sont dans le « bon » sens $(0 < x)$.

iii. *Concluons* :

D'après la question i. on a : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.

et comme $\int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$, on a : $\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt = 0$

puisque $0 \leq x < 1$ et donc $\lim_{n\to\infty}(x^{n+1}) = 0$.

Dès lors :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = [-ln(1-t)]_0^x = -ln(1-x)$$

Conclusion : $\boxed{\sum \frac{x^k}{k} \text{ converge et que } \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)}$

f) *Calculons* $\mathbb{P}(B)$:
D'après la question 1. on sait que $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B\cap A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6} \text{ d'après 2.b)}\\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = -\frac{1}{5}ln\left(1-\frac{5}{6}\right) = \boxed{\frac{ln6}{5}} \text{ d'après la question précédente}\end{aligned}$$

Problème 3 :

I/ Questions préliminaires

1. *Déterminons* $\mathbb{P}(A_0)$, $\mathbb{P}(B_0)$ *et* $\mathbb{P}(C_0)$:
D'après les hypothèses, le mobile est au départ au sommet A.
Il en découle que : $\boxed{\mathbb{P}(A_0) = 1, \mathbb{P}(B_0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(C_0) = 0}$

2. *Calculons* $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$ *et* $\mathbb{P}(C_1)$:
A l'instant 0 le mobile est en A. La probabilité qu'il reste en A est r, donc $\boxed{\mathbb{P}(A_1) = r}$.
La probabilité qu'il passe en B qui est le sommet qui suit A est p, donc $\boxed{\mathbb{P}(B_1) = p}$.
La probabilité enfin qu'il passe en C qui est le sommet qui précède A est q, donc $\boxed{\mathbb{P}(C_1) = q}$.

3. *Justifions que, pour tout entier naturel n, on a :* $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$:
Notons au préalable qu'à chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$)le mobile est sur l'un des trois sommets du triangle (Une récurrence rapide permet de s'en assurer puisqu'il est sur le sommet A au départ et en supposant qu'il est à un instant n fixé sur l'un des trois sommets, les règles de parcourt aléatoire présentées par l'énoncé nous assurent qu'à l'instant $n+1$ il sera encore sur l'un des trois sommets...)
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'évènements.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1}$

4. A la lecture de l'énoncé :
$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = r$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = q$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = p$.

5. On pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.
On rappelle que $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'évènements
Par application de la formule des probabilités totales, on a donc :
$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\cdot\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\cdot\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\cdot\mathbb{P}(C_n)$
Autrement dit :

$$a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n$$

En notant par ailleurs que :

$$\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = p,\ \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = r \text{ et } \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = q$$

et

$$\mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = q,\ \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = p \text{ et } \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = r$$

on peut conclure par application successive de la formule des probabilités totales que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n + rc_n \end{cases}}$$

6. D'après ce qui précède :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_2 = ra_1 + qb_1 + pc_1 = r^2 + qp + pq = r^2 + 2pq \\ b_2 = pa_1 + rb_1 + qc_1 = 2pr + q^2 \\ c_2 = qa_1 + pb_1 + rc_1 = 2qr + p^2 \end{cases}}$$

II/ Étude informatique : modélisation de l'évolution du mobile au cours du temps

1. On prend pour convention que la position du mobile vaut 0 s'il est en A, 1 s'il est en B et 2 s'il est en C. On considère les listes `Td=[1,2,0]` et `Ti=[2,0,1]`.
   Si `pos=i` où $i \in [\![0, 2]\!]$, alors trois cas se présentent :
   – Si le mobile est en A, à savoir `pos=0` et qu'il se déplace dans le sens trigonométrique, alors `Td[pos]=Td[0]=1`. Il est désormais en B.
   S'il se déplace dans le sens indirect, alors `Ti[pos]=Ti[0]=2`. Il est arrivé en C.
   – Si le mobile est en B, à savoir `pos=1` et qu'il se déplace dans le sens trigonométrique, alors `Td[pos]=Td[1]=2`. Il est désormais en C.
   S'il se déplace dans le sens indirect, alors `Ti[pos]=Ti[1]=0`. Il est arrivé en A.
   – Si le mobile est en C, à savoir `pos=2` et qu'il se déplace dans le sens trigonométrique, alors `Td[pos]=Td[2]=0`. Il est désormais en A.
   S'il se déplace dans le sens indirect, alors `Ti[pos]=Ti[2]=1`. Il est arrivé en B.

   Conclusion : `Td[pos]` retourne la nouvelle position occupée à partir de `pos` si le déplacement a lieu dans le sens trigonométrique et `Ti[pos]` retourne la nouvelle position en cas de déplacement indirect.

2. *Écrivons une fonction* `deplacement(p,q,n)` *qui retourne sous forme d'un entier compris entre* 0 *et* 2 *la position du mobile à l'instant* $t = n$ *(en supposant toujours qu'il part de A) et affiche à l'écran la phrase : «* `le mobile est en ... à l'instant t = n` *» :*

   On va exploiter les listes `Td` et `Ti` introduite à la question précédente.
   On fait se déplacer le mobile n fois et pour ça on utilise une boucle « Pour » avec k allant de 0 à $n-1$ et à chaque passage dans la boucle, on choisit si le mobile se déplace dans le sens trigonométrique (probabilité p), dans le sens indirect (probabilité q) ou reste sur place (probabilité r).

   On rappelle que $p + q + r = 1$.

   Il suffit donc de faire `deplacement = rdm.random()` pour retourner un réel au hasard pris entre 0 et 1 selon une loi uniforme.
   Alors $\mathbb{P}($`deplacement` $<= p) = p$, $\mathbb{P}(p <$ `deplacement` $<= p + q) = q$ et $\mathbb{P}($`p+q < deplacement`$) = r$.

   Dès lors, en exploitant la réponse à la question II.1., on peut écrire :

```
def deplacement(p,q,n):
    pos = 0 # position initiale du mobile
    for k in range(n):
       deplacement = rdm.random()
       if deplacement <= p: # sens trigo
          pos = Td[pos]
       elif deplacement <= p+q: # sens inverse du sens trigo
          pos = Ti[pos]
    if pos == 0:
       print("le mobile est en A")
    elif pos == 1:
       print("le mobile est en B")
    else:
       print("le mobile est en C")
    return pos
```

3. *Écrivons une fonction* ***arriveEnC(p,q)*** *qui retourne le nombre de pas nécessaire pour rejoindre le point C :* Il suffit de reprendre le programme précédent mais en remplaçant la boucle « Pour » par une boucle « Tant que » jusqu'à ce que le point C soit atteint...
   Soit :

```
def arriveEnC(p,q):
    pos = 0
    k = 0
    while pos != 2:
       deplacement = rdm.random()
       if deplacement <=p:
          pos = Td[pos]
       elif deplacement <= p+q:
          pos = Ti[pos]
       k += 1
    return k
```

   Comment estimer l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre de pas pour atteindre C ? Il suffit de retourner :

   `np.mean([arriveEnC(p,q) for k in range(m)])`

4. `Écrivons une fonction estimProba(m,n) permettant d'estimer la probabilité d'être respectivement en` A, B `et` C `à l'instant` $t = n$ `en retournant une liste [pA,pB,pC] formée des fréquences respectives des positions` A, B `et` C `à l'issue de m répétitions de l'expérience :`

   Il suffit pour ça d'appeler un grand nombre m de fois la fonction `deplacement(p,q,n)` qui indique la position du mobile à l'instant $t = n$ (✐ sans oublier de commenter tous les `print` car on n'a pas besoin de l'affichage de la position un millier de fois...)
   Si les valeurs sont placées dans une liste (appelée `L` ci-dessous) alors il suffit d'appeler la méthode `count(i)` qui retourne le nombre de fois où l'entier i est présent dans la liste.
   Soit :

```
def estimProba(p,q,n,m):
    L = [deplacement(p,q,n) for k in range(m)]
    return L.count(0)/m,L.count(1)/m,L.count(2)/m
```

III/ Etude du cas $p = q$ avec $p \in]0; \frac{1}{2}]$ et $r = 1 - 2p$

1. $X_{n+1} = M \cdot X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $M = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$ est la traduction matricielle du système obtenu en I.5), à savoir :

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n + rc_n \end{cases}$$

2. Une matrice est dite stochastique si la somme des termes dans chacune de ses colonnes vaut 1.

   a) *Donnons un argument probabiliste qui justifie que M est une matrice stochastique :*
   On rappelle que, d'après la question I.5), la première colonne de la matrice désigne respectivement :

   $$r = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}),\ p = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \text{ et } q = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})$$

   donc, parce que les événements A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1} sont incompatibles, on a :

   $$r + p + q = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1} \cup B_{n+1} \cup C_{n+1})$$

   Or $\{A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}\}$ est un système complet d'événements.

   donc on retrouve bien de façon probabiliste le fait que $r + p + q = 1$. Il en est de même pour la somme des termes des colonnes 2 et 3.

   b) *L'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?* La réponse est non puisque la matrice nulle, par exemple, n'est pas une matrice stochastique...

   c) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Montrons que leur produit est encore une matrice stochastique :* Posons $C = A \cdot B = (c_{i,j})$.
   Alors pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$ fixé, la somme S_j des termes de la j-ième colonne de C vaut :

   $$\begin{aligned} S_j = \sum_{i=1}^{3} c_{i,j} = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} a_{i,k} b_{k,j} \right) &= \sum_{k=1}^{3} b_{k,j} \sum_{i=1}^{3} a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{3} b_{k,j} \text{ car } \sum_{i=1}^{3} a_{i,k} = 1 \text{ (somme des termes de la } k\text{-ième colonne de } A) \\ &= 1 \text{ car } \sum_{k=1}^{3} b_{k,j} = 1 \text{ (somme des termes de la } j\text{-ième colonne de } B) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des matrices stochastiques est stable par le produit matriciel}}$.

3. Au regard des hypothèses, on écrit désormais $M = \begin{pmatrix} 1-2p & p & p \\ p & 1-2p & p \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$.

   a) $(M - \lambda I) \cdot X = 0$ n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée $M - \lambda I$ est non inversible. Autrement dit si et seulement si $\text{rg}(M - \lambda I) < 3$.

$$\begin{aligned}
rg(M-\lambda I) &= rg\begin{pmatrix} 1-\lambda-2p & p & p \\ p & 1-\lambda-2p & p \\ p & p & 1-\lambda-2p \end{pmatrix} \\
&= rg\begin{pmatrix} p & p & 1-\lambda-2p \\ p & 1-\lambda-2p & p \\ 1-\lambda-2p & p & p \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_3) \\ (L_2) \\ (L_1) \end{matrix} \\
&= rg\begin{pmatrix} p & p & 1-\lambda-2p \\ 0 & 1-\lambda-3p & -(1-\lambda-3p) \\ 0 & -p(1-\lambda-3p) & (1-\lambda-3p)(\lambda-1+p) \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2-L_1) \\ (pL_3-(1-\lambda-2p)L_1) \end{matrix}
\end{aligned}$$

Puisque $p^2-(1-\lambda-2p)^2 = (p-1+\lambda+2p)(p+1-\lambda-2p)$ et le pivot $p \neq 0$...

$$\text{D'où } rg(M-\lambda I) = rg\begin{pmatrix} p & p & 1-\lambda-2p \\ 0 & 1-\lambda-3p & -(1-\lambda-3p) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3+pL_2) \end{matrix}$$

Avec : $P(\lambda) = (1-\lambda-3p)(\lambda-1+p) - p(1-\lambda-3p)$
$= (1-\lambda-3p)(\lambda-1+p-p) = (1-\lambda-3p)(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 1-3p$

Conclusion : $\boxed{(M-\lambda I)X = 0 \text{ n'est pas de Cramer si } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1-3p}$

b) Conformément à la demande de l'énoncé, on note désormais $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1-3p < 1$.
<u>Résolvons le système associé à $\lambda_1 = 1$:</u>

$$(M-I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} px+py-2pz &= 0 \\ -3py+3pz &= 0 \end{cases}, p \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ -y+z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= z \\ x &= z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_1) \text{ est } \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\}}$

<u>Résolvons le système associé à $\lambda_2 = 1-3p$:</u>

$$(M-(1-3p)I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} px+py+pz &= 0 \\ 0x+0y+0z &= 0 \\ 0x+0y+0z &= 0 \end{cases}, p \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z = 0 \Leftrightarrow x = -y-z, \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_{1-3p}) \text{ est } \{(-y-z,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}}$

c) Pour $i \in [\![1,2]\!]$, on pose $E_{\lambda_i} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (M-\lambda_i I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\}$ et on montre qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels en utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
– $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
– Le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ est élément de E_λ car solution évidente du système.
– $\forall u, v \in E_\lambda$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $w = \alpha u + v \in E_\lambda$:
Posons $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$. Alors $w = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$ et

$$(M-\lambda I)\begin{pmatrix} \alpha x + x' \\ \alpha y + y' \\ \alpha z + z' \end{pmatrix} = \alpha(M-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (M-\lambda I)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

puisque u et v sont dans E_λ.

Conclusion : $\boxed{E_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

Par ailleurs, il découle immédiatement de la question précédente que :

$$E_1 = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$$

et

$$E_{1-3p} = \{(-y-z,y,z),(y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$$

d) *Montrons que $\mathcal{B} = (u_1,u_2,u_3)$ formée par juxtaposition des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$:*
On montre que la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ est une famille libre car $\text{rg}(\{u_1,u_2,u_3\}) = 3$ (Application immédiate du pivot de Gauss).
Par ailleurs $\text{Card}(\{u_1,u_2,u_3\}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice de cette famille de vecteurs.
Montrons que P est inversible et calculer son inverse :
D'après ce qui précède, il est immédiat que $\text{rg}(P) = \text{rg}(\{u_1,u_2,u_3\}) = 3$. Donc P est inversible puisque son rang est égale à sa taille.
Par ailleurs :

$$X = P \cdot X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+y'+z' \\ x'-y' \\ x'-z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+z' & = x \\ y' & = x'-y \\ z' & = x'-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' & = \frac{1}{3}(x+y+z) \\ y' & = \frac{1}{3}(x-2y+z) \\ z' & = \frac{1}{3}(x+y-2z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X' = P^{-1} \cdot X \text{où } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Par le calcul, nous obtenons :

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3p & 0 \\ 0 & 0 & 1-3p \end{pmatrix}$$

6. Nous déduisons de la question précédente, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$M = PM'P^{-1}$$

Par ailleurs, ar récurrence, on montre que pour tout entier naturel n : $M^n = P \cdot M'^n \cdot P^{-1}$.
En effet : $M^0 = I_3 = PM'^0P^{-1}$ et si au rang n on a $M^n = P \cdot M'^n \cdot P^{-1}$, alors :
$M^{n+1} = M^n \cdot M = P \cdot M'^n \cdot P^{-1} \cdot P \cdot M' \cdot P^{-1} = P \cdot M'^n \cdot I \cdot M' \cdot P^{-1} = P \cdot M'^{n+1} \cdot P^{-1})$.

Conclusion : $\boxed{M^n = P \cdot M'^n \cdot P^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}}$

7. Nous savons que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} = M \cdot X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (cf. 3.a)).
D'après l'égalité qui précède, on a : $X_1 = M \cdot X_0$
On suppose que $X_n = M^n \cdot X_0$ pour n fixé ($n \geq 0$)
Alors : $X_{n+1} = M \cdot X_n = M \cdot M^n \cdot X_0 = M^{n+1} \cdot X_0$

Conclusion : $\boxed{\text{On a montré par récurrence : } X_n = M^n \cdot X_0,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

Rappelons que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$ pour conclure : $\boxed{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N}}$

<u>Pour conclure, il s'agit maintenant de calculer M^n :</u>

Par ailleurs, toujours par récurrence, $M'^n = diag[1, (1-3p)^n, (1-3p)^n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
D'où :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-3p)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-3p)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-3p)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-3p)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ (1-3p)^n \\ (1-3p)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 2(1-3p)^n \\ 1 - (1-3p)^n \\ 1 - (1-3p)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n & = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}(1-3p)^n \\ b_n = c_n & = \dfrac{1 - (1-3p)^n}{3} \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$

8. On note à nouveau que les trois suites tendent vers $\dfrac{1}{3}$ quand n tend vers l'infini, ce qui montre que, lorsque n tend vers l'infini, le mobile est sur chacun des sommets du triangle de façon équiprobable.

   On le vérifiera aisément avec Python en exécutant par exemple :

   `estimProba(1/5,1/5,100,1000)` qui retourne : `(0.331, 0.346, 0.323)`

FIN