CHAP. 2 Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires

Les objectifs : « Ce chapitre étend le cadre des probabilités qui avait été posé en première année pour aborder une situation plus générale, se prêtant à la définition des variables aléatoires discrètes ou à densité.
On présente brièvement à cette occasion d'un point de vue axiomatique l'espérance, la variance et leurs propriétés générales. Elles seront remprises dans chacun des contextes étudiés (variables discrètes et continues). »

1 Notion de probabilité.

1.1 Définitions

Définition — *Epreuve aléatoire et univers*

On appelle `épreuve aléatoire` *toute expérience susceptible d'être répétée dans des conditions a priori identiques et dont chaque résultat possible est un élément prévisible d'un ensemble bien déterminé appelé* `univers` *et noté* Ω.

Définition — *Tribu* $\mathcal{T}$

Une `tribu` $\mathcal{T}$ *(ou* σ*-algèbre) sur* Ω *est une partie de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *contenant* Ω*, stable par passage au complémentaire et telle que, pour tout suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$*, la réunion des* B_n*,* $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ *est un élément de* $\mathcal{T}$*.*

Remarque 1.1 : On convient de nommer **évènement** les éléments d'une tribu.
Conséquences :
– Si A et B sont des évènements, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont aussi des évènements.
– Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements, l'intersection dénombrable des A_n est un évènement.

Exemple — *Exemple 1.1*

On effectue une série de lancers d'une pièce de monnaie qui s'arrête à la première apparition du « pile ».
*Un **résultat** élémentaire de cette expérience est* $\omega_1 =$ *;* $\omega_n =$
$\{\omega_n\}$ *est un **évènement** élémentaire. On note* $\{\omega_0\}$ *l'évènement « n'obtenir que des Face »*
Alors $\Omega =$
$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *est l'évènement :*
$A_n = \displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{\omega_k\}$ *est l'évènement :*

Remarque 1.2 : Si A et B sont deux évènements associés à une épreuve $\mathcal{E}$, alors :

- $A \cap B$ est l'évènement réalisé quand A et B sont le sont conjointement.
- $A \cup B$ est l'évènement réalisé quand l'un au moins des deux est réalisé.
  Plus généralement :
- $\displaystyle\bigcap_{n\in I} A_n$ est réalisé lorsque **tous** les évènements A_n le sont.
- $\displaystyle\bigcup_{n\in I} A_n$ est réalisé lorsque l'un **au moins** des évènements A_n l'est.

Vocabulaire probabiliste

$\omega \in \Omega$	ω est un résultat de l'épreuve
$\{\omega\} \subset \Omega$	$\{\omega\}$ est un évènement élémentaire
$A \in \mathcal{T}$	A est un évènement
Ω	« Univers des possibles » ou « Evènement certain ».
$\emptyset$	« Evènement impossible ».
$\overline{A}$	Evènement contraire de A
$A \subset B$	A implique B.
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles.

1.2 Propriétés des probabilités.

Définition

Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle `probabilité` *sur $(\Omega, \mathcal{T})$ l'application notée $\mathbb{P}$ qui à tout évènement $A \in \mathcal{T}$ associe le réel $\mathbb{P}(A)$ et vérifie les trois propriétés :*

① $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{T}$

② $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

③ *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles,*

$$\text{la série } \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) \text{ converge et } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \text{ [\textbf{Axiome de } \sigma\textbf{-additivité}]}$$

Remarque 1.3 : Tout espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ est noté $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On parle d'**espace probabilisé**.

Remarque 1.4 : Lorsque Ω est fini et si tous les évènements élémentaires sont **équiprobables**, alors pour toute partie A de Ω :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Le calcul de cette probabilité relève alors de l'analyse combinatoire.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère $A, B \in \mathcal{T}$. Alors :

① $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

② $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

③ $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

④ $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$; $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ *si* $A \subset B$

⑤ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$; *en particulier* $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

⑥ $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ *si les A_k sont deux à deux incompatibles.* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ *sinon.*

Théorèmes *Théorème 1.1*

Soit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum_{n\geq 0} p_n$ converge et a pour somme 1, alors il existe et une seule probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.5 : Tout évènement A pouvant se décrire comme union d'évènements élémentaires $\{\omega_n\}$, il suffit de connaître la probabilité de chaque évènement élémentaire pour calculer la probabilité de A.

Exemple *Exemple 1.2*

Soit une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$. Quelle est dans ce cas la probabilité de l'évènement A : « l'entier est pair » ?

Remarque 1.6 : On distinguera désormais l'évènement impossible (respectivement certain) des évènements de probabilité nulle (respectivement de probabilité 1). Si $\mathbb{P}(A) = 0$ on dira que A est **négligeable** ou **quasi-impossible**. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dira que A est **quasi-certain**.

Définition *Système complet d'évènements*

Une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un `système complet d'évènements` si les A_n sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est égale à Ω.

Propriété

Pour une telle suite, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.

Théorèmes *Formule des probabilités totales*

Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, alors pour tout évènement B,

$$\text{la série } \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n \cap B) \text{ converge et } \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B).$$

Remarque 1.7 : On retiendra notamment le cas particulier pour lequel $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{A, \overline{A}, \emptyset \cdots\}$ où $A \subset \Omega$. Dans ce cas : $\boxed{\forall B \subset \Omega,\, \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})}$

Remarque 1.8 : La formule des probabilités totales reste valable dans le cas d'une suite (A_n) d'évènements deux à deux incompatibles et tels que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ (on dit dans ce cas que le système est `quasi-complet`).

1.3 conditionnement

Définition

Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* B *un évènement non négligeable* $(\mathbb{P}(B) \neq 0)$*. On appelle* `probabilité conditionnelle` *sachant* B *la probabilité notée* $\mathbb{P}_B$ *et définie par :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* B *un évènement non négligeable. Alors, en tant que probabilité,* P_B *vérifie les propriétés suivantes :*

① $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega|B) = 1$

② $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$

③ $\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2)$

④ $\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_B(A_n)$ *si les évènements* A_n *sont 2 à 2 incompatibles.*

Remarque 1.9 : On retiendra notamment pour la pratique les égalités suivantes :

① $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
② $1 = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(\overline{A})$
③ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$

⚠ On ne confondra pas $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$ et en particulier on n'écrira pas $\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = \mathbb{P}(A)$

Théorèmes

Formule des probabilités totales 2

La ***formule des probabilités totales*** *s'interprète en termes de probabilités conditionnelles sous la forme :*
Si $\{A_n\}$ *est un système complet ou quasi complet d'événements, alors pour tout événement* B*,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \cdot \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)$$

avec la convention suivante *: Si* $\mathbb{P}(A_n) = 0$*, alors on pose :* $\mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B) = 0$

Théorèmes

Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $\{A_n\}$ *un ensemble d'événements tel que* $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$*. Alors :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorèmes

Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'événements tel que $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et pour tout entier naturel k :

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k) \cdot \mathbb{P}_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)}$$

1.4 Indépendance

Définition

indépendance

Deux évènements A et B sont dits indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Si ces deux évènements sont de probabilité non nulle, cette définition s'écrit aussi :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \text{ ou encore } \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

Remarques 1.10 :

① Si $A = \emptyset$ ou bien $A = \Omega$ alors A est indépendant de tout autre évènement.

② On ne confondra pas « évènement indépendants » et « évènements incompatibles ».
A titre d'exemple, si on considère l'évènement $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$:

- ✦ A et Ω sont des évènements indépendants mais non incompatibles.
- ✦ A et $\overline{A}$ sont des évènements incompatibles mais non indépendants.

⚠ L'indépendance dépend de la modélisation et en particulier de la probabilité choisie. Aussi lorsqu'on change de probabilité, des évènements qui étaient indépendants ne le restent pas forcément.

Exemple

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les deux évènements A et B suivants :

A : « on obtient 3 ou 6 » et B : « on obtient un multiple de 2 »

Dire si ces évènements sont indépendants dans le cas où les faces sont équiprobables, dans celui où la probabilité d'obtenir 6 vaut $1/2$ tandis que les autres faces sont équiprobables.

Propriété

Soient A et B deux évènements indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, alors les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants ainsi que les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Définition

Soit $\{A_k, k \in [\![0,n]\!]\}$ *une suite d'évènements de l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Ces évènements sont `indépendants 2 à 2` *si* $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j)\ \forall 1 \leq i < j \leq n$.

Ces évènements sont `mutuellement indépendants` *si* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j),\ \forall J \subset [\![0,n]\!]$

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

Si une épreuve $\mathcal{E}$ consiste en une succession d'épreuves $\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n$ telles que les résultats des épreuves $\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_k$ n'influent pas sur le résultat de $\mathcal{E}_{k+1}$, alors les épreuves $\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n$ sont dites indépendantes et les évènements $A_1, \cdots, A_n$ respectivement liés à ces n épreuves sont mutuellement indépendants.

Exemple

On répète n *épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre* $p \in]0,1[$. *La probabilité d'obtenir* k *succès au cours de ces* n *épreuves vaut :*

2 Variables aléatoires réelles

Définition

Variables aléatoires réelles

On appelle `variable aléatoire réelle` *sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *toute application* X *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$, *noté* $(X \leq a)$, *soit un évènement.*
L'univers image noté $X(\Omega)$ *est l'ensemble des valeurs prises par* X.

Propriété

Soit X *une variable aléatoire réelle et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$(X \in I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\} \text{ est un évènement.}$$

En particulier, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x < y$, *les ensembles :* $(X = x)$, $(X \leq x)$, $(X \geq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$, $(x \leq X \leq y)$, $(x \leq X < y)$, $(x < X \leq y)$ *et* $(x < X < y)$ *sont des évènements.*

Remarque 2.1 : On note que $(X \leq x) = (X < x) \cup (X = x)$ et $(X \leq x) = \overline{(X > x)}$
On a également : $(x < X \leq y) = (X \leq y) \cap (X > x) = (X \leq y) \setminus (X \leq x)$ avec $(X \leq x) \subset (X \leq y)$

Exemples — *Exemples élémentaires à connaître*

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, $c \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{T}$.

① *Application constante égale à c dite aussi variable aléatoire certaine.*

② *Application caractéristique φ_A.*

③ *On effectue des tirages successifs dans une urne contenant une proportion p de boules blanches. A tout résultat ω de cette épreuve on associe par l'application X le rang de la première boule blanche.*

Remarque 2.2 : Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète.

Définition — *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle `fonction de répartition` *la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Remarque 2.3 : On note dès à présent qu'il est identique de connaître la fonction de répartition et la loi d'une variable aléatoire X. On dit que F_X **caractérise** la loi de X.

Propriété

Soit F_X une fonction de répartition. Alors :

$$F_X \text{ est croissante sur } \mathbb{R},\ \lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$$

Exemples

Savoir tracer les fonctions de répartition des variables aléatoires suivantes :

- ✦ *variable aléatoire certaine égale à c, $c \in \mathbb{R}$.*
- ✦ *Variable aléatoire φ_A où $A \subset \Omega$*
- ✦ *Variable aléatoire X où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$*
- ✦ *Variable aléatoire X où $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$*
- ✦ *Variables aléatoires $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ à l'aide de Python.*

Définition — *indépendance*

Deux variables aléatoires X et Y sont `indépendantes` *si pour tout $t, s \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}((X \leq t) \cap (Y \leq s)) = \mathbb{P}(X \leq t) \cdot \mathbb{P}(Y \leq s)$$

Remarque 2.4 : Lorsqu'on a une hypothèse d'expériences indépendantes, les variables associées sont indépendantes.

Propriété

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous les intervalles I et J de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X \in I, Y \in J) = \mathbb{P}(X \in I) \cdot \mathbb{P}(Y \in J)$$

Définition *Indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires*

Soit $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires définies sur une même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. On dit que ces variables sont indépendantes (mutuellement) si

$$\forall I_1, \cdots, I_n \in \mathbb{R}, \text{ les évènements } \{(X_k \in I_k), k \in [\![0, n]\!]\} \text{ sont mutuellement indépendants.}$$

Propriété

- ✦ *Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.*
- ✦ *Si $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \cdots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \cdots, X_{n+p})$ sont indépendantes.*
- ✦ *Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$, $\cdots$, $u_n(X_n)$ sont indépendantes.*

3 Espérance et variance

Exemple *espérances usuelles*

En vous appuyant sur le programme de première année, rappeler l'espérance des variables aléatoires suivantes :

$$X_1 = c \ (c \in \mathbb{R}),\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]},\ X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ et } X_4 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

Remarque 2.5 : Si X est une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{x_1, \cdots, x_n\}$, alors l'espérance de X est la moyenne de ces valeurs pondérées par leurs probabilités respectives. Soit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

On admet qu'il existe une fonction espérance notée $\mathbb{E}$, définie sur une partie de l'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, possédant au moins les propriétés de linéarité, de positivité et vérifiant $\mathbb{E}(1) = 1$. Autrement dit :

① Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ il est possible qu'elle n'admette pas d'espérance.

② Si X et Y admettent une espérance, alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$$

③ Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{E}(X)$ existe, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

④ Si X est une variable aléatoire certaine égale à 1 alors $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut 1.

Définition

moments d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et r un entier naturel.
On dit que X admet un `moment d'ordre` r *si $\mathbb{E}(X^r)$ existe.*
On dit que X admet un `moment centré d'ordre` r *si $\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^r\right)$ existe.*
On appelle `variance de` X *et on note $\mathbb{V}(X)$ le moment centré d'ordre 2 de X s'il existe.*
Sa racine carrée $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ est appelée `écart-type` *de X et se note $\sigma(X)$. IL se mesure dans les mêmes unités que X*

Propriété

Formule de Koënig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance. Alors pour tout $r \geq 2$, la variable X admet des moments jusqu'à l'ordre r si et seulement si X admet des moments centrés jusqu'à l'ordre r. On note à cette occasion que les moments centrés peuvent être calculés à partir des moments et inversement ; pour $r = 2$ on a notamment :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance. Alors :

- ✦ *Si elle existe, la variance de X est positive.*
- ✦ $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Définition

variables aléatoires centrées et réduites

- ✦ *Une variable aléatoire X admettant une espérance est dite* `centrée` *si $\mathbb{E}(X) = 0$*
- ✦ *Une variable aléatoire X admettant une variance est dite* `réduite` *si $\mathbb{V}(X) = 1$.*
- ✦ *Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On appelle* `variable centrée réduite associée à` X *la variable notée X^* et définie par*

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Propriété

Soit X^* variable centrée réduite associée à X. Alors :

$$\mathbb{E}(X^*) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(X^*) = 1$$

Propriété *Moments et indépendance*

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

- ✦ $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- ✦ $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

Remarque 2.6 : Les collections de n variables aléatoires indépendantes jouent un rôle fondamental dans la modélisation statistique au sein de laquelle elles sont appelées échantillon.
On notera donc que ce dernier résultat se généralise par récurrence au cas de n variables aléatoires indépendantes admettant une variance en écrivant :

$$\boxed{\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)}$$