CHAP. 1 Séries numériques

Les objectifs : « Les séries sont introduites ici comme un outil pour donner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors de questions probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

1 Généralités

1.1 Définitions.

Définition *séries numériques*

Soit (u_n) une suite numérique de nombres réels ou complexes, de premier terme u_0.
On appelle `série numérique` *de terme général u_n et de premier terme u_0 la suite (S_n) définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Pour tout entier naturel n, S_n est dit la nième `somme partielle` *(ou somme partielle d'indice n ou d'ordre n) de la série $\sum u_n$.*

Notation : La série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$ si on ne s'intéresse qu'à sa nature.

Définition *somme d'une série convergente*

La série de terme général u_n converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) des sommes partielles est appelée la `somme de la série` *et on note :*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite (S_n) diverge, on dira que la série est `divergente` *(ou qu'elle diverge).*

Remarque 1 : Comme pour l'étude des suites, on distinguera deux sous-problèmes : celui de la convergence et, une fois celle-ci acquise, celui de la valeur de la somme de la série.

Remarque 2 : Si jamais le terme générale u_n d'une série numérique n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 > 0$, on se ramènera aux deux précédentes définitions en posant : $u_0 = 0 = \cdots = u_{n_0-1}$
On retiendra que la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, ou encore :
Si $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature (d'où la notation $\sum u_n$)

Remarque 3 : Toute suite peut être vue comme une série. En effet, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$$

Dès lors :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ avec } \begin{cases} u_0 &= a_0 \\ u_k &= a_k - a_{k-1}\ ,\ \forall k \geq 1 \end{cases},$$

Exemple

La divergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $a_n = \ln(n+1)$ *permet d'obtenir la divergence de la série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$

1.2 Propriétés.

Théorèmes *condition nécessaire de convergence*

Soit (u_n) *une suite numérique. Si la série* $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

La réciproque est fausse !

Théorèmes *Combinaison linéaire de séries convergentes*

Si deux séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors pour tous réels* λ *et* μ*, la série* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

Propriété

Soit (u_n) *une suite positive.*

– *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \geq 0$$

– *Si de plus la suite* (u_k) *n'est pas identiquement nulle, alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k > 0$$

1.3 Les séries à termes positifs.

On considère dans ce paragraphe les séries de terme général u_n, positif à partir d'un certain rang noté par la suite n_0 (la nature d'une série étant indépendante de ses premiers termes, on supposera sans risque que $n_0 = 0$).
Par ailleurs, en passant à l'opposé, les résultats qui vont suivre s'étendent par linéarité à toute série de terme général u_n négatif à partir d'un certain rang.

Théorèmes

Soit (u_n) une suite réelle positive à partir d'un certain rang.

- $\sum u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ *est majorée.*
- $\sum u_n$ *diverge si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Théorèmes

Théorème de comparaison

Soient deux séries à termes positifs u_n et v_n telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :

$$\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} & \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ diverge} & \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$$

2 Les exemples de référence

2.1 Séries géométriques

Définition

Séries géométriques

Une `série géométrique` *est une série $\sum u_n$ où (u_n) est une suite géométrique.*

Théorèmes

Convergence des séries géométriques

Soit q un nombre réel.
La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Théorèmes

Séries géométriques dérivées

Soit q un nombre réel.
Les séries $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. On a alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad et \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Remarque : On en déduit que les séries $\sum nq^n$ et $\sum n^2q^n$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \ldots \qquad ; \sum_{n=0}^{\infty} n^2q^n = \ldots$$

2.2 Séries exponentielle

Théorèmes

Série exponentielle

Pour tout x réel, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge et* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Remarque : On déduit de ce résultat que, pour $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ou encore $x^n = \circ(n!)$

On retiendra le cas particulier $x = 1$, à savoir : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

2.3 Séries télescopiques

Définition

Séries télescopiques

Une `série télescopique` *est une série de la forme* $\sum(u_{n+1} - u_n)$ *où* (u_n) *est une suite réelle.*

Théorèmes

Convergence des séries télescopiques

Soit (u_n) une suite réelle.
La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ *converge si et seulement si la suite* (u_n) *est convergente*

.

La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ se démontre par théorème de convergence par comparaison avec la série télescopique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$

3 Convergence absolue

Définition

Séries absolument convergentes

Soit (u_n) une suite réelle. La série $\sum u_n$ *est* `absolument convergente` *si, et seulement si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente*

Théorèmes

Condition suffisante de convergence d'une série

Toute série absolument convergente est convergente

La réciproque est fausse ! On pensera par exemple à la série $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont le T.D. permettra de montrer qu'elle converge, de somme égale à $\ln(2)$ alors que $\sum |u_n|$ est la série harmonique qui diverge.

On admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.