5 T.D. séries numériques réelles

Les objectifs : Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente.
Combinaison linéaire de séries convergentes.
Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs.
Convergence et somme de la série géométrique et de ses dérivées.
Convergence et somme de la série exponentielle.
Convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et divergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.
Convergence absolue.

Exercice 1 ❤ : Travailler avec les séries de référence

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries :

$$a)\ \sum_{n\geq 0}(n+1)3^{-n};\quad b)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+3n}{2^n};\quad c)\ \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n!};\quad d)\ \sum_{n\geq 1}\ln(n)$$

$$e)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2^{n+1}}{3^n n!};\quad f)\ \sum_{n\geq 1}\frac{2n}{(\sqrt{2})^n};\quad g)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+2^n}{n!};\quad h)\ \sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n^3}$$

Exercice 2 ✶ : Reconnaître les séries télescopiques

Déterminer la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n}{(n+1)!};\quad b)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1+2+\cdots+n}{1+2^3+\cdots n^3};\quad c)\ \sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right);\quad d)\ \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercice 3 ✶ : Appliquer le théorème de comparaison

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\cos^2(n)};\quad b)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\ln(1+n)}{n\ln(n^2+1)};\quad c)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2};\quad d)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n+\frac{1}{2^n}}$$

Exercice 4 ✶✶ : Conséquence du théorème de comparaison

On considère deux séries à termes positifs de terme général respectifs u_n et v_n telles que $u_n \sim v_n$.

① Montrer qu'il existe un entier naturel $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$.

② En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

③ *Application :* Montrer la convergence de $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et la divergence de $\sum \ln\left(\frac{2+sin(1/n)}{2-sin(1/n)}\right)$.

Exercice 5 ❤ :

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n \cdot \exp(-u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

① Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

② Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 6 ❤ :

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u et v deux suites respectivement définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

② Conclure que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. On notera par la suite S sa limite.

③ En notant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$, montrer que $S = ln(2)$

④ En distinguant selon la parité de n, montrer que $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire un moyen d'obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près de $ln(2)$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ✶✶ :

Soit un entier naturel k non nul fixé. Pour tout entier n on définit :

$$I_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k}dx\ ;\ J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^k} \text{ et } u_n = \frac{(-1)^n}{kn+1}$$

① Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Calculer $J - I_n$.

② Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Calculer sa somme pour $k = 1$ et $k = 2$.