- Programme de colle semaines 5 et 6 -

chapitre 1 : Séries numériques

Remarque : *L'ensemble des énoncés doit être connu.*

1. Définitions : Sommes partielles, convergence, divergence d'une série, somme d'une série convergente.
   ✐ La série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$.

   En cas de convergence, la somme de la série est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

2. Combinaison linéaire de séries convergentes.

3. Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs.
   ✐ « Tout autre critère de convergence est hors programme ». Pour autant, on saura démontrer, si on est guidé, que si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

4. Convergence et somme de la série géométrique et des séries « dérivées » : $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$.

   Savoir déterminer la nature et la somme de $\sum nq^n$ et $\sum n^2 q^n$.

5. Convergence et calcul de la série exponentielle (Résultat admis).

6. Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de la série harmonique. ✐ « L'étude générale des séries de Riemann est hors programme ».

7. Soit (u_n) une suite réelle. La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) est convergente.

8. Convergence absolue d'une série à termes réels. ✐ « La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence d'une série [...] L'étude de séries semi-convergentes est hors programme. »

Les questions de cours possibles sont les suivantes :

- **Q1 :** $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = 0$
- **Q2 :** Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
- **Q3 :** Convergence et somme de la série géométrique et de la série « dérivée » : $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$.
- **Q4 :** Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
- **Q5 :** Divergence de la série harmonique.

Bonnes colles !