Devoir surveillé : Analyse et probabilités

Le sujet se compose d'un exercice et deux problèmes. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer et, à titre indicatif, on pourra consacrer 20 mn à l'ex., 40 mn au Pb1 et 2 h au Pb2. Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice ***est*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercice :

Soit $a \in]0,1[$. On définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 = a$$

① Montrer que la suite (u_n) est monotone, convergente et déterminer sa limite.

② Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme en fonction de a.

③ Montrer que la série $\sum v_n$ où $v_n \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

④ Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \Leftrightarrow \sum u_n$ et $\sum w_n$ de même nature. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Problème 1 :

Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à n : chaque jeton apparaît deux fois dans l'urne sous deux couleurs distinctes (bleue et rouge). On effectue des tirages simultanés de deux jetons. Si les jetons tirés sont identiques (en valeur) alors on les enlève de l'urne. Sinon, on les remet tous les deux dans l'urne.
Soit T_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne de son contenu.

① Cas où l'urne ne contient qu'une paire ($n = 1$) : Quelle loi suit la variable T_1 ?

② On suppose $n = 2$: (2 paires). Soit P_i l'événement : « on tire une paire au tirage n° i ».

a) Déterminer $T_2(\Omega)$.
b) Combien y a-t-il de tirages simultanés possibles de 2 jetons ? En déduire $\mathbb{P}(P_1)$.
c) Exprimer $(T_2 = 2)$ à l'aide de P_1 et P_2 et plus généralement, pour tout $k \geq 2$, $(T_2 = k)$ en fonction des événements $P_1, P_2, \cdots, P_{k-1}$ et P_k.
d) Montrer que $\mathbb{P}(T_2 = k) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ pour tout $k \geq 2$.
e) *Rappel :* Si $\sum k\mathbb{P}(T_2 = k)$ cv, alors $\mathbb{E}(T_2)$ existe et vaut : $\displaystyle\sum_{k\in T_2(\Omega)} k\mathbb{P}(T_2 = k)$. Que vaut $E(T_2)$?

③ On revient au cas n quelconque.

a) Écrire une fonction Python `rgPremierePaire(n)` d'argument n qui retourne le rang du tirage d'une première paire.
b) Écrire une fonction Python `simulT(n)` d'argument n qui simule la variable T_n, autrement dit qui retourne le nombre de tirages nécessaires pour vider une urne composée de n paires.
c) En supposant qu'on peut faire appel à la fonction `np.mean()` de la bibliothèque `numpy`, comment pourriez-vous utiliser la fonction précédente pour évaluer $\mathbb{E}(T_2)$?

d) En évaluant $\mathbb{E}(T_n)$ pour $1 \leq n \leq 10$ (avec $m = 1000$ répétitions indépendantes) on a obtenu les valeurs suivantes : `[1, 4.038,8.981,16.293,24.913,36.476,49.7646,63.766,80.7876,99.729]`. Conjecturer une formule donnant l'espérance de T_n.

④ On considère l'événement C : « on tire deux jetons identiques lors du premier tirage ».

a) Montrer que $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2n-1}$

b) Après avoir préciser avec quel système complet d'événement vous travaillez, montrer grâce à la formule des probabilités totales que : $\mathbb{P}(T_n = k+1) = \dfrac{1}{2n-1}\mathbb{P}(T_{n-1} = k) + \dfrac{2n-2}{2n-1}\mathbb{P}(T_n = k)$

c) En déduire que si T_n admet une espérance, alors $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_{n-1}) + 2n - 1$.

d) Cela semble-t-il cohérent avec les résultats du 3.d) ?

Problème 2 :

Partie I :

Pour tout p réel dans l'intervalle $]0, 1[$, on considère la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_{n+1} = 1 - p + pv_n^2, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } v_0 \in]0, 1[$$

① Écrire une fonction Python `calculV(p,n)` de paramètres d'entrée p et n qui demande à l'utilisateur de rentrer le premier terme v_0 de la suite et retourne la valeur de v_n.

② Soit $f : x \longmapsto 1 - p + px^2$ telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Montrer que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$ avec éventuellement $1 = \dfrac{1-p}{p}$ pour une valeur de p qu'on précisera.

b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$ prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que $v_n \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (on écrira complètement la récurrence).

③ On suppose que $p \leq 1/2$. Montrer que $\dfrac{1-p}{p} \geq 1$ et donner le graphe de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé bien choisi. Démontrer que la suite (v_n) est croissante et convergente vers une limite qu'on déterminera.

④ On s'intéresse au cas $p > 1/2$. Tracer le graphe de f après avoir comparé $\dfrac{1-p}{p}$ à 1.
Déterminer la nature et la limite éventuelle de la suite (v_n) en précisant pourquoi il est nécessaire de distinguer les cas $0 < v_0 < \dfrac{1-p}{p}$ et $\dfrac{1-p}{p} < v_0 < 1$.

Partie II : Application

On considère une population de bactéries pour laquelle une bactérie a une probabilité p de donner 2 cellules filles avant de mourir, et une probabilité $q = 1 - p$ de mourir sans se reproduire.
Toutes les bactéries suivent la même loi et leurs reproductions sont considérées comme indépendantes les unes des autres.

Soit X_n la taille de la population a la n-ième génération. On suppose qu'il n'y a qu'une bactérie au début de l'expérience et donc que X_0 vaut 1 de façon certaine.

① Première génération :

a) Justifier que $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ et déterminer $\mathbb{P}(X_1 = k)$ pour tout $k \in X_1(\Omega)$.
b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.
✐ On rappelle que, par définition, pour une variable aléatoire X discrète finie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)\,;\ \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k\in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X = k) \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

② On pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter u_n. Expliciter u_0 et u_1.

③ On souhaite écrire une fonction Python `simulPopulation(p,n)` permettant de simuler l'évolution de cette population au cours de n générations, p et n étant fournis en paramètres d'entrée.
Le corps de cette fonction est le suivant :

```
1    def simulPopulation(p,n):
2        nB = 1
3        P = [0]*(n+1)
4        P[0] = nB
5        for k in range(...):
6           if nB > 0:
7              for i in range(nB):
8                 if ...: # la bactérie se dédouble
9                    nB += ...
10                else:
11                   nB -= ...
12             P[k]=nB
13       return P
```

a) Commenter les lignes 2 à 4.
b) Justifier la structure conditionnelle en ligne 6. Pourquoi l'absence d'un `else` ?
c) Compléter les lignes 5, 8, 9 et 11 en le justifiant.
✐ On pourra faire appel à la fonction `random()` de la bibliothèque `random` dont on rappelle qu'elle retourne un nombre réel pris au hasard entre 0 et 1.

④ Justifier que que : $\mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)^2$.

⑤ A l'aide du système complet d'événements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$ établir grâce à la formule des probabilités totales que

$$u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2 = f(u_n)$$

⑥ On se place dans le cas $p \leq 1/2$.

a) Justifier pourquoi on peut être certain que la population de bactéries va s'éteindre.
b) En vous inspirant de la fonction `simulPopulation()`, écrire une fonction `tempsJusquAExtinction(p)` qui retourne le nombre de générations nécessaire pour que la population s'éteigne.
c) Écrire une fonction `ListeTpsExtinction(p,m)` qui répète un nombre m de fois (supposé grand) la fonction précédente et retourne une liste `L` formée des temps nécessaires à l'extinction de la population pour chacune de m répétition.
d) En exécutant `L.count(1)/m` on obtient successivement pour $p = 0.4$ et $m = 1000$ les valeurs 0.592 et 0.604. Cela vous semble-t-il cohérent ?
e) Comment feriez-vous, connaissant L, pour estimer la valeur de u_2 ?

f) Écrire, sans recours à la bibiliothèque `numpy` une fonction `moyenne(L)` et `ecartType(L)` retournant respectivement la moyenne et l'écart-type d'une liste `L`.
Lequel de ces deux résultats vous semble le plus probable lorsque $p = 0.4$? $m1 = 2.35$ et $s1 = 2.67$ ou $m2 = 14.25$ et $s2 = 3.24$? Justifier votre choix.

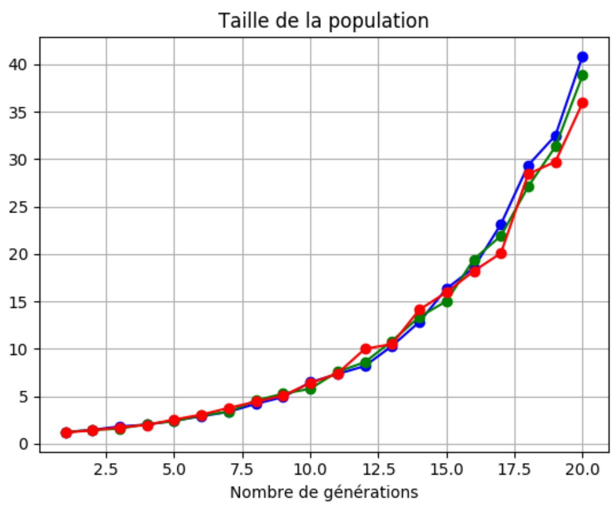
⑦ Dans le cas $p > 1/2$, justifier que la probabilité que la population ne s'éteigne pas vaut : $1 - q/p$.

Partie III : Le cas particulier $p > 1/2$

Nous nous plaçons désormais exclusivement dans le cas $p > 1/2$. Sous cette condition, on peut imaginer que la population peut converger vers un état stable ou bien tendre vers l'infini. Les questions suivantes ont pour objectif d'exclure l'un de ces deux cas.
Nous introduisons pour ça la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

① Écrire une fonction python `tailleMoyenne(n,p,m)` permettant de calculer en fonction de p le nombre moyen d'individu à la génération n lors de la répétition un nombre m de fois (supposé grand) du processus de reproduction à partie d'une bactérie.
En traçant les valeurs obtenues pour n allant de 1 à 20 on obtient les tailles moyennes ci-dessous. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?



② a) Montrer que $g_{X_1} = f$. Que vaut $g'_{X_1}(1)$?
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$ et justifier la dérivabilité de g_{X_n}.
Que vaut $g'_{X_n}(1)$?

③ Montrer que $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) = 0$ si j impair ou k impair et que, sinon :

$$\mathbb{P}_{(X_n=2j)}(X_{n+1} = 2k) = \binom{2j}{k} p^k q^{2j-k} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 2j$$

④ En déduire que $g_{X_{n+1}}(t) = g_{X_n}(g_{X_1}(t))$ et montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_1)$.

⑤ Conclure sur l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En quoi avons-nous désormais une idée du comportement de la population bactérienne dans les cas où elle ne s'éteint pas ?