Correction du devoir d'analyse et probabilités

Exercice :

Soit $a \in]0,1[$. On définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 = a$$

① *Montrons que la suite (u_n) est monotone, convergente et déterminons sa limite :*

- Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, ce qui assure que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$. On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$:
  a) $u_0 = a \in]0,1[$
  b) On suppose que $u_n \in]0,1[$ pour n fixé ($n \in \mathbb{N}$).
  c) Alors, $0 < 1 - u_n < 1$ et donc $u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \in]0,1[$.
  d) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

  La suite (u_n) est décroissante et minorée. $\boxed{\text{Elle est convergente}}$.

- Notons $L = \underset{n\to\infty}{lim}\, u_n$. Alors par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient : $L = L - L^2 \Leftrightarrow L = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et converge vers } 0}$

② *Montrons que la série $\sum u_n^2$ est convergente et déterminons sa somme en fonction de a :*
On note que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$ et on rappelle qu'étudier la série $\sum u_n^2$ est étudier la suite (S_n) des sommes partielles définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \text{ par télescopages}$$

Or $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = 0 = \underset{n\to\infty}{lim}\, u_{n+1}$ donc $\underset{n\to\infty}{lim}\, S_n = u_0 = a$.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum u_n^2 \text{ converge et sa somme } \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \text{ vaut } a.}$

③ *Montrons que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente :*
On note que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k > 0$ et donc $\ln(u_k)$ est défini pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Comme précédemment, on écrit que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (T_n)$ où :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \text{ par télescopages}$$

Or $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = 0^+$ donc $\underset{n\to\infty}{lim}\, T_n = -\infty$.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ est divergente}}$

④ *Étudions la nature de la série* $\sum u_n$ *:*
Commençons par démontrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \Leftrightarrow \sum u_n$ et $\sum w_n$ de même nature :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} \frac{u_n}{w_n} = 1 \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}/\forall n \geq N,\ 0 < \frac{1}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3}{2}$$

D'où, $\forall n > N,\ \dfrac{v_n}{2} < u_n < \dfrac{3}{2} v_n$.
Par application du théorème de convergence par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que :

- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{1}{2} v_n$ converge et donc $\sum v_n$ converge.
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \frac{3}{2} v_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \Leftrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum w_n \text{ de même nature}}$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n)$$

Or $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = 0$ donc $\ln(1-u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n$ ou encore $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -v_n$
De plus, d'après la question 3., $\sum v_n$ diverge donc $\sum -v_n$ diverge et l'équivalence qui précède assure que $\sum u_n$ et $\sum -v_n$ sont de même nature.
Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge}}$

Problème 1 :

Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à n : chaque jeton apparaît deux fois dans l'urne sous deux couleurs distinctes (bleue et rouge). On effectue des tirages simultanés de deux jetons. Si les jetons tirés sont identiques (en valeur) alors on les enlève de l'urne. Sinon, on les remet tous les deux dans l'urne.
Soit T_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne de son contenu.

① Cas où l'urne ne contient qu'une paire ($n = 1$) : On demande quelle loi suit la variable T_1.
Il suffit de dire qu'au premier tirage, on sortira nécessairement l'unique paire présente et donc T_1 est une variable aléatoire certaine égale à 1.
Conclusion : $\boxed{T_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1}$

② On suppose $n = 2$: (2 paires). Soit P_i l'événement : « on tire une paire au tirage n° i ».

a) *Déterminons* $T_2(\Omega)$ *:* On ne peut pas extraire les deux paires de l'urne avant le deuxième tirage. A l'inverse, il est possible de tirer systématiquement deux jetons non appariés avant d'obtenir y-compris la première paire...
Conclusion : $\boxed{T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![}$

b) *Combien y a-t-il de tirages simultanés possibles de 2 jetons ?* Il s'agit d'une 2-combinaison d'un ensemble à 4 éléments (1 et 2 rouges, 1 et 2 bleus). D'où, $\text{Card}(\Omega) = \dbinom{4}{2} = 6$.

Dès lors, les tirages étant équiprobables, on a : $\mathbb{P}(P_1) = \dfrac{2}{6}$ car il y a deux paires qui constituent un cas favorable.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(P_1) = \dfrac{1}{3}}$

c) *Exprimons* $(T_2 = 2)$ *à l'aide de* P_1 *et* P_2 *:* Il est immédiat que $(T_2 = 2) = P_1 \cap P_2$
Et plus généralement,

$$\forall k \geq 2,\ (T_2 = k) = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cdots \cap \overline{P_{k-2}} \cap P_{k-1} \cap P_k$$

car dès qu'un paire a été extraite, il n'en reste plus qu'une dans l'urne et l'extraire devient un événement certain (autrement dit, on a vidé l'urne au k-ième tirage si, et seulement si, la première paire a été extraite au $(k-1)$-ième tirage).

d) *Montrons que* $\mathbb{P}(T_2 = k) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ *pour tout* $k \geq 2$ *:*
Les épreuves ne sont pas indépendantes puisque, dans le cas où une paire est choisie, elle est extraite de l'urne dont la composition est donc modifiée.
Nous sommes donc contraints d'appliquer la formule des probabilités composées, à savoir :

$$\mathbb{P}(T_2 = k) = \mathbb{P}(\overline{P_1}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{P_1}}(\overline{P_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{P_1}\cap\cdots\cap\overline{P_{k-3}}}(\overline{P_{k-2}}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{P_1}\cap\cdots\cap\overline{P_{k-2}}}(P_{k-1}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{P_1}\cap\cdots\cap\overline{P_{k-2}}\cap P_{k-1}}(P_k)$$

Or

$$\mathbb{P}_{\overline{P_1}\cap\cdots\cap\overline{P_{i-1}}}(\overline{P_i}) = \frac{2}{3} \text{ pour tout } i \geq 2$$

$$\mathbb{P}_{\overline{P_1}\cap\cdots\cap\overline{P_{k-2}}}(P_{k-1}) = \frac{1}{3}$$

et (il ne reste plus qu'une paire!)

$$\mathbb{P}_{\overline{P_1}\cap\cdots\cap\overline{P_{k-2}}\cap P_{k-1}}(P_k) = 1$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(T_2 = k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{2}}$

e) *Rappel :* Si $\sum k\mathbb{P}(T_2 = k)$ cv, alors $\mathbb{E}(T_2)$ existe et vaut : $\displaystyle\sum_{k \in T_2(\Omega)} k\mathbb{P}(T_2 = k)$.

Que vaut $E(T_2)$ *?* La série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ converge car elle est de même nature que la série géométrique dérivée de raison $q = \dfrac{2}{3} \in]-1, 1[$ (la multiplication par $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ne change pas la nature de la série...).
Donc $\mathbb{E}(T_2)$ existe et pour la somme on note qu'elle commence à 2 et non pas à 1. Dès lors :

$$\boxed{\mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - 1\right) = \frac{1}{2}(9-1) = 4}$$

③ On revient au cas n quelconque.

a) *Écrivons une fonction Python* `rgPremierePaire(n)` *d'argument* n *qui retourne le rang du tirage d'une première paire :*
On commence par choisir un mode de représentation de l'urne. Pour ça, on renumérote les jetons, de 1 à n pour les dés bleus et de $n+1$ à $2n$ pour les dés rouges. En conséquence, tirer aléatoirement le couple $(5, n+3)$ correspond au tirage du jeton bleu numéro 5 et le jeton rouge numéroté 3.
Pour modéliser le tirage d'une partie à deux éléments d'un ensemble qui en contient $2n$ nous choisissons la fonction `rdm.sample(L,k)` de la bibliothèque `random` dont les paramètres d'entrée sont la liste L au sein duquel a lieu le tirage de k éléments distincts.

Tant que le 2 jetons n'ont pas la même valeur (pour nous, l'écart entre les deux ne vaut pas n), on recommence le tirage. Il s'agit donc d'une structure répétitive de type « Tant que ».

Une rédaction possible est la suivante :

```
def rgPremierePaire(n):
    L = range(1,2*n+1)
    t1,t2 = rdm.sample(L,2)
    k = 1
    while abs(t2-t1) != n:
       t1,t2 = rdm.sample(L,2)
       k += 1
    return k
```

b) *Écrivons une fonction Python* `simulT(n)` *d'argument n qui simule la variable T_n, autrement dit qui retourne le nombre de tirages nécessaires pour vider une urne composée de n paires :*

Sachant que l'urne est composée de n paire, il faudra faire appel n fois à la fonction `rgPremierePaire()` pour vider l'urne. On utilise pour cela une structure répétitive « Pour » qui appellera successivement la fonction précédente avec, au départ n paires, puis $n-1$ paires, $n-2$, etc. jusqu'à ce qu'il ne restes plus qu'une seule paire dans l'urne, auquel cas l'événement « Tirer une paire » est un événement certain.
Il ne restera plus qu'à retourner la somme de tous les tirages nécessaires pour obtenir chacune des paires et pour ça on introduit un compteur nT qui sera initialisé à 0.

```
def simulT(n):
    # il y a n paires à extraire de l'urne...
    nT = 0
    for k in range(n,0,-1):
       nT += rgPremierePaire(k)
    return nT
```

c) Sachant qu'on nous autorise à faire appel à la fonction `np.mean()` de la bibliothèque `numpy`, il est possible d'évaluer $\mathbb{E}(T_2)$ en appelant un grand nombre de fois la fonction `simulT()` (par exemple 1000 fois) pour un nombre de couples initial de jetons égale à $n = 2$ et en calculant la moyenne des valeurs retournées, soit

`np.mean([simulT(2) for i in range(1000)])`

d) En évaluant $\mathbb{E}(T_n)$ pour $1 \leq n \leq 10$ (avec $m = 1000$ répétitions indépendantes) on a obtenu les valeurs suivantes : `[1, 4.038,8.981,16.293,24.913,36.476,49.7646,63.766,80.7876,99.729]`.
Au regard des valeurs obtenues, on peut conjecturer une formule du type $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = n^2}$.

④ On considère l'événement C : « on tire deux jetons identiques lors du premier tirage ».

a) *Montrons que* $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2n-1}$ *:* On rappelle que $\text{Card}(\Omega) = \dbinom{2n}{2}$ car il s'agit de dénombrer les 2-combinaisons d'un ensemble comprenant $2n$ éléments.

Or il y a n paires possibles. D'où : $\mathbb{P}(C) = \dfrac{n}{\dbinom{2n}{n}} = \dfrac{n}{\frac{2n(2n-1)}{2}}$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2n-1}}$.

b) *Après avoir préciser avec quel système complet d'événement vous travaillez, montrons grâce à la formule des probabilités totales que :* $\mathbb{P}(T_n = k+1) = \dfrac{1}{2n-1}\mathbb{P}(T_{n-1} = k) + \dfrac{2n-2}{2n-1}\mathbb{P}(T_n = k)$

Si on se fie à la question précédente, on prendra assez naturellement comme système complet d'événement le système : $\{C, \overline{C}\}$.
Dès lors, d'après la formule des probabilités totales :

$$prob(T_n = k+1) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}_C(T_n = k+1) + \mathbb{P}(\overline{C})\mathbb{P}_{\overline{C}}(T_n = k+1)$$

Or :
- $\mathbb{P}_C(T_n = k+1) = \mathbb{P}(T_{n-1} = k)$: En effet, sachant qu'une paire a été extraite dès le premier tirage, il ne reste plus qu'à vider l'urne désormais composée de $n-1$ paire en k tirages.
- $\mathbb{P}_{\overline{C}}(T_n = k+1) = \mathbb{P}(T_n = k)$: En effet, sachant qu'on n'a pas extrait de paire au premier tirage, il reste n paire dans l'urne et k tirages pour la vider.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(T_n = k+1) = \dfrac{1}{2n-1}\mathbb{P}(T_{n-1} = k) + \dfrac{2n-2}{2n-1}\mathbb{P}(T_n = k)}$

c) *Déduisons-en que si T_n admet une espérance, alors $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_{n-1}) + 2n - 1$:*
Comme $T_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$, nous supposons que $\sum k\mathbb{P}(T_n = k)$ converge et $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} k\mathbb{P}(T_n = k)$.
Dès lors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \frac{1}{2n-1}\sum_{k=n}^{\infty} k\mathbb{P}(T_{n-1} = k-1) + \frac{2n-2}{2n-1}\sum_{k=n}^{\infty} k\mathbb{P}(T_n = k-1) \\
&= \frac{1}{2n-1}\sum_{k'=n-1}^{\infty} (k'+1)\mathbb{P}(T_{n-1} = k') + \frac{2n-2}{2n-1}\sum_{k'=n-1}^{\infty} (k'+1)\mathbb{P}(T_n = k') \\
&= \frac{1}{2n-1}\left(\sum_{k'=n-1}^{\infty} k'\mathbb{P}(T_{n-1} = k') + \sum_{k'=n-1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = k')\right) + ... \\
&\qquad\qquad + \frac{2n-2}{2n-1}\left(\sum_{k'=n-1}^{\infty} k'\mathbb{P}(T_n = k') + \sum_{k'=n-1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = k')\right) \\
&= \frac{1}{2n-1}(\mathbb{E}(T_{n-1}) + 1) + \frac{2n-2}{2n-1}(\mathbb{E}(T_n) + 1) \text{ car on note que } \mathbb{P}(T_n = n-1) = 0
\end{aligned}$$

Il suffit de passer $\mathbb{E}(T_n)$ à gauche de l'égalité pour obtenir :

$$\frac{1}{2n-1}\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{2n-1}\mathbb{E}(T_{n-1}) + 1$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_{n-1}) + 2n - 1}$

d) *En quoi cela semble-t-il cohérent avec les résultats du 3.d) ?*
On sait que $\mathbb{E}(T_1) = 1$ puisque T_1 est une variable aléatoire certaine égale à 1.
On en déduit que $\mathbb{E}(T_2) = 4$.
On fait l'hypothèse que $\mathbb{E}(T_n) = n^2$ conformément à la conjecture faire à la question 3.d).
Alors, $\mathbb{E}(T_{n+1} = n^2 + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1, \mathbb{E}(T_n) = n^2}$ - Cohérent avec la conjecture de 3.d.

Problème 2 :

Partie I :

Pour tout p réel dans l'intervalle $]0,1[$, on considère la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_{n+1} = 1 - p + pv_n^2,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } v_0 \in]0,1[$$

① *Écrivons une fonction Python permettant de déterminer v_n en fonction de p et de n :*

Analyse : Nous choisissons de passer les paramètres p et n en variable d'entrée et demandons à l'utilisateur de choisir le premier terme v_0 dans l'intervalle $]0,1[$.
Puisqu'on nous demande de calculer v_n connaissant v_0, il est nécessaire de faire n appels successifs à la relation de récurrence $v_{n+1} = 1 - p + pv_n^2$.
Nous utilisons donc une structure répétitive « Pour ».

```
def calculV(p,n):
   v0 = float(input('Donner le premier terme (0<v0<1) :'))
   for k in range(n):
      v = 1-p+p*v0**2
      v0 = v
   return v
```

② Soit $f : x \longmapsto 1 - p + px^2$ telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) *Montrons que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$:*

$$f(x) = x \Leftrightarrow 1 - p + px^2 = x \Leftrightarrow px^2 - x + 1 - p = 0$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2 \geq 0$.

– *Premier cas :* Si $p = 1/2$, $\Delta = 0$ et $f(x) = x$ admet $x_0 = 1 = \dfrac{1-p}{p}$ pour racine double.

(on peut vérifier que sous cette condition : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$)

– *Deuxième cas :* Si $p \in]0,1[\setminus\{1/2\}$ alors $\Delta > 0$ et $f(x) = x$ admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{1 - |2p-1|}{2p} \text{ et } x_2 = \frac{1 + |2p-1|}{2p}$$

avec $|2p-1| = \begin{cases} 2p-1 & \text{si } p > 1/2 \\ 1-2p & \text{si } p < 1/2 \end{cases}$.

Pour toute valeur de p dans $]0,1[\setminus\{1/2\}$ les deux racines sont donc 1 et $\dfrac{1-p}{p}$.

Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } f(x) = x \text{ sont 1 et } \dfrac{1-p}{p}}$

b) *Montrons que la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$ prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$:*
f est continue et dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynôme.
$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = 2px > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,1]$.
Donc $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) = 1 - p \leq f(x) \leq f(1) = 1$ avec $1 - p > 0$ car $p \in]0,1[$.
Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1]}$

On en déduit que $v_n \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence. En effet :

➢ $v_0 \in [0,1]$

➢ supposons que $v_n \in [0,1]$ pour n fixé ($n \geq 0$).

➢ Alors $v_{n+1} = f(v_n) \in [0,1]$ puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$

➢ ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1]}$

③ *Montrons que si $p \leq 1/2$ alors la suite (v_n) est croissante et convergente vers une limite qu'on déterminera :*

Nous venons de voir que $v_n \in I = [0,1]$ pour tout entier naturel n.
Étudions le signe de $f(x) - x$ sur I :

D'après la question 2.a) nous savons que $f(x) - x = 0$ admet deux racines réelles 1 et $\dfrac{1-p}{p}$. Donc :

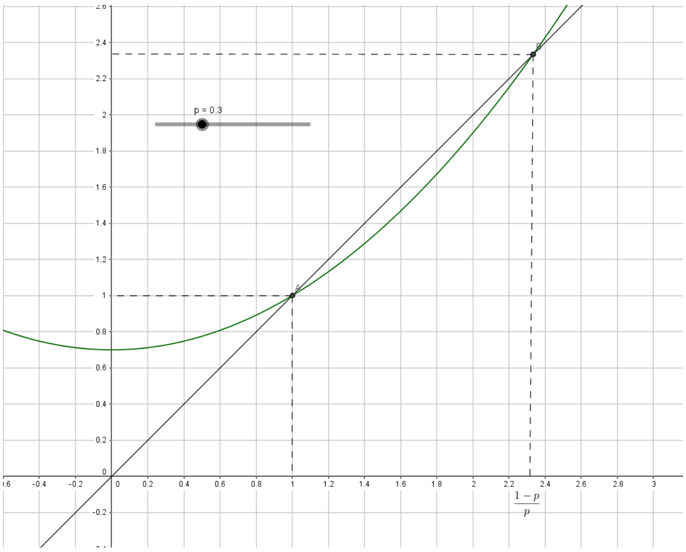
$$f(x) - x = px^2 - x + 1 - p = p(x-1)\left(x - \frac{1-p}{p}\right)$$

Or

$$p \leq 1/2 \Leftrightarrow -p \geq -1/2 \Leftrightarrow 1 - p \geq 1/2 \Leftrightarrow \frac{1-p}{p} \geq 1$$

Dès lors, puisque $f(x) - x$ est du signe de p à l'extérieur de ses racines, il découle que :

$$f(x) - x \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$$



Il suffit alors de prendre $x = u_n$ pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n) \geq v_n$.
On en déduit que la suite (v_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge par application du théorème de la limite monotone.

Soit L sa limite. f étant continue sur $[0,1]$, on a : $f(L) = L$ et donc $L = 1$ ou $L = \dfrac{1-p}{p}$.

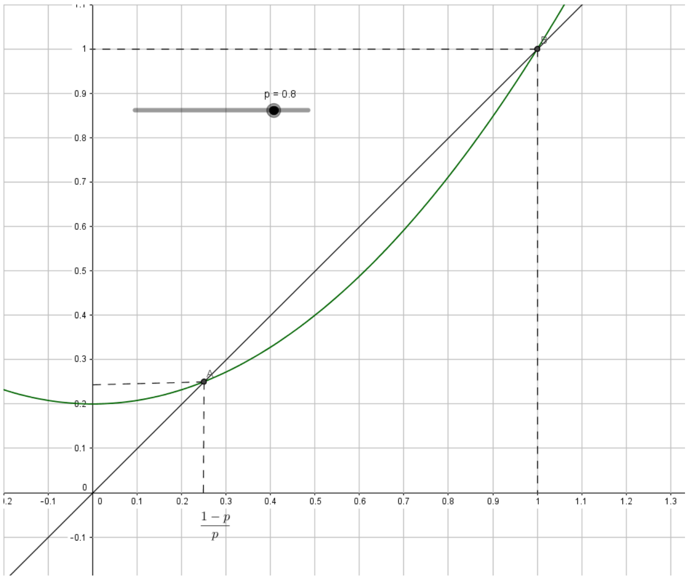
Or on vient de voir que $\dfrac{1-p}{p} \geq 1$, donc la seule limite possible est $L = 1$.

Conclusion : $\boxed{(u_n) \text{ est croissante et converge vers } L = 1}$

④ *Que pouvons-nous dire dans le cas $p > 1/2$?*

Si $p > 1/2$ alors $0 < \dfrac{1-p}{p} < 1$.
E comme $f(x) - x$, trinôme du second degré, est positif à l'extérieur de ses racines, on a cette fois :

$$f(x) - x \geq 0 \text{ si } x \leq \frac{1-p}{p} \text{ et } f(x) - x \leq 0 \text{ si } \frac{1-p}{p} < x < 1$$



– *Premier cas :* Supposons que $0 < v_0 < \dfrac{1-p}{p}$ et posons $J_1 =]0, \alpha[$ où $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$.
  f est croissante sur $I = [0,1]$ et donc sur J_1 qui est un intervalle stable par f puisque :
  $$x \in J_1 \Leftrightarrow 0 < x < \alpha \Rightarrow f(0) = 1 - p \leq f(x) \leq f(\alpha) = \alpha$$
  Dès lors, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in J_1$ et comme $f(x) \geq x$ sur J_1, on a :
  $$f(v_n) = v_{n+1} \geq v_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
  On en déduit que (v_n) est une suite croissante et majorée par $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$. Elle converge par application du théorème de la limite monotone vers $L \in J_1$ tel que $f(L) = L$.
  Conclusion : $\boxed{(v_n)_{n\geq 0} \text{ est croissante et converge vers } \alpha = \dfrac{1-p}{p}}$

– *Deuxième cas :* Supposons que $\dfrac{1-p}{p} < v_0 < 1$ et posons $J_2 =]\alpha, 1[$ où $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$.
  f est croissante sur $I = [0,1]$ et donc sur J_2 qui est aussi un intervalle stable par f puisque :
  $$x \in J_2 \Leftrightarrow \alpha < x < 1 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha \leq f(x) \leq f(1) = 1$$
  Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in J_2$ avec $f(v_n) = v_{n+1} \leq v_n$.
  On en déduit que (v_n) est une suite décroissante et minorée par $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$. Elle converge par application du théorème de la limite monotone vers $L \in J_2$ tel que $f(L) = L$.
  Conclusion : $\boxed{(v_n)_{n\geq 0} \text{ est décroissante et converge vers } \alpha = \dfrac{1-p}{p}}$

Partie II : Application

On considère une population de bactéries pour laquelle une bactérie a une probabilité p de donner 2 cellules filles avant de mourir, et une probabilité $q = 1 - p$ de mourir sans se reproduire.
Toutes les bactéries suivent la même loi et leurs reproductions sont considérées comme indépendantes les unes des autres.

Soit X_n la taille de la population a la n-ième génération. On suppose qu'il n'y a qu'une bactérie au début de l'expérience et donc que X_0 vaut 1 de façon certaine.

① Première génération :

a) *Déterminons $X_1(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X_1 = k)$ pour tout $k \in X_1(\Omega)$:*
X_1 ne peut prendre que deux valeurs : 0 si la cellule meurt sans se reproduire et 2 si elle se divise en deux cellules filles. Dès lors, $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ et, d'après l'énoncé

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p,\ \mathbb{P}(X_1 = 2) = p$$

b) *Calculons l'espérance et la variance de X_1.* On utilise les formule qui nous sont rappelées :
$\mathbb{E}(X_1) = \sum\limits_{k \in X_1(\Omega)} k\mathbb{P}(X_1 = k) = 0\mathbb{P}(X_1 = 0) + 2\mathbb{P}(X_1 = 2) = 2p$;
$\mathbb{E}(X_1^2) = \sum\limits_{k \in X_1(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X_1 = k) = 0^2\mathbb{P}(X_1 = 0) + 2^2\mathbb{P}(X_1 = 2) = 4p$
D'où $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}^2(X_1) = 4p - 4p^2 = 4p(1 - p)$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X_1) = 2p \text{ et } \mathbb{V}(X_1) = 4p(1 - p)}$

② On pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. *Interprétons u_n et explicitons u_0 et u_1 :*
$(x_n = 0)$ est l'événement : « Il n'y a plus de bactéries à la génération n ». Donc u_n est la probabilité d'extinction de la population de bactéries à partir de la n-ième génération.
En particulier :
$u_0 = \mathbb{P}(X_0 = 0) = 0$ car $(X_0 = 0)$ est un événement impossible.
$u_1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$ d'après les hypothèses.

③ a) *Commentons les lignes 2 à 4 :*
On créé une liste `P` formée de $n+1$ zéros qui doit contenir, à terme, le nombre d'individus jusqu'à la génération n.
`P[0]` doit contenir le nombre `nB` de bactérie à la génération 0, à savoir `nB=1`.

b) *Justifions la structure conditionnelle en ligne 6. Pourquoi l'absence d'un `else` ?* Si `nB > 0` détermine s'il reste des bactéries à la k-ième génération. Si c'est le cas, chacune d'entre elle se dédouble. Sinon, ça veut dire qu'il n'en reste plus. La population est éteinte et `P[k]=0`. Mais comme la liste `P` a été initialisée avec des valeurs nulles, il n'y a dans ce cas rien n'à faire.

c) *Complétons les lignes 5, 8, 9 et 11 en le justifiant :*

- Ligne 5 : Les bactéries vont se reproduire n fois. Le nombre de répétitions étant connu, on opte pour une structure répétitive « Pour », avec k allant de 1 à n ou k allant de 0 à $n - 1$.

- Lignes 8, 9 et 11 : Pour chacune des `nB` bactéries, on les fait se dédoubler avec un probabilité p et mourir sans reproduction avec une probabilité $1 - p$. On utilise pour ça la fonction `random()` de la bibliothèque `random` qui retourne un réel aléatoire entre 0 et 1.
Dans le cas où elle se reproduit, le nombre `nB` de bactéries augmente de 1 (elle donne naissance à deux filles et meurt) et, si elle meurt avant de se reproduire, le nombre `nB` de bactéries diminue de 1.

Une rédaction possible est la suivante :

```
def simulPopulation(p,n):
    nB = 1
```

```
P = [0]*(n+1) ; P[0] = nB
for k in range(1,n+1):
   if nB > 0: # il y a des bactéries
      for i in range(nB):
         if rdm.random()<p:
            nB += 1
         else:
            nB -= 1
      P[k]=nB
return P
```

④ *Justifions que que :* $\mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)^2$ *:* Si il y a deux bactéries à la première génération, alors la probabilité de ne plus avoir de bactéries à la $(n+1)$-ième génération est la probabilité que chacune de ces deux bactéries n'ait plus de descendance à leur n-ième génération.
Autrement dit :

$$\mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}\left((X_n = 0) \cap (X_n = 0)\right) = \mathbb{P}(X_n = 0) \cdot \mathbb{P}(X_n = 0)$$

car on nous a dit que les reproductions étaient considérées indépendantes.

⑤ *A l'aide du système complet d'événements* $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$ *établissons une relation entre* u_{n+1} *et* u_n *:* Commençons par noter que $\{(X_1 = 0), (X_1 = 2)\}$ est bien un système complet d'événements car : $(X_1 = 0) \cup (X_1 = 2) = \Omega$ et $(X_1 = 0) \cap (X_1 = 2) = \emptyset$

Note : Il faut penser que cette partie est une application de la Partie I du sujet. Autrement dit, le but du jeu est de montrer que : $u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2$... voyons comment :

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_{n+1} = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0)\mathbb{P}(X_1 = 2) \\ &= 1 \cdot (1-p) + p \cdot \mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_{n+1} = 0)\mathbb{P}(X_1 = 2) \\ &= 1 - p + p \cdot [\mathbb{P}(X_n = 0)]^2 \\ &= f(u_n) \end{aligned}$$

En effet, si il n'y a plus de cellules à la première génération, alors il n'y en aura pas à la génération $n+1$ et donc $\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_{n+1} = 0) = 1$.

⑥ interpréter pour $p \leq 1/2$:

a) Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ il est possible d'utiliser les résultats de la première partie.
Si $p \leq 1/2$ alors $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = \underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$.
Si $p > 1/2$, alors $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = \underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{1-p}{p} \in]0, 1[$.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } p \leq 1/2, \text{ la population de bactérie va s'éteindre de façon certaine.}}$

b) *En nous inspirant de la fonction* ***`simulPopulation()`****, écrivons une fonction* ***`tempsJusquAExtinction(p)`*** *qui retourne le nombre de générations nécessaire pour que la population s'éteigne :* Il suffit pour ça de faire se reproduire les bactéries tant que la population en contient au moins une car dès qu'elle est éteinte, il n'y en aura jamais plus d'autre par absence de génération spontanée...

```
def tempsJusquAExtinction(p):
    nB = 1
    k = 0
    while nB > 0:
       for i in range(nB):
          if rdm.random()<p:
             nB += 1
          else:
             nB -= 1
          k += 1
    return k
```

c) *Écrivons une fonction* ***ListeTpsExtinction(p,m)*** *qui répète un nombre m de fois (supposé grand) la fonction précédente et retourne une liste* `L` *formée des temps nécessaires à l'extinction de la population pour chacune de m répétition :*

```
def TempsExtinction(p,m):
    L = []
    for k in range(m):
       L.append(tempsJusquAExtinction(p))
    return L
```

d) En exécutant `L.count(1)/m` on obtient successivement pour $p = 0.4$ et $m = 1000$ les valeurs 0.592 et 0.604. Cela semble cohérent puisqu'on rappelle que `L.count(1)/m` calcul la fréquence des 1 dans la liste 1, à savoir estime la probabilité qu'il faille 1 génération pour que la population s'éteigne, ou encore $\mathbb{P}(u_1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p = 0.6$ d'après II.2

e) Comment feriez-vous, connaissant L, pour estimer la valeur de u_2 ? *A écrire...*

f) Écrire, sans recours à la bibiliothèque `numpy` une fonction `moyenne(L)` et `ecartType(L)` retournant respectivement la moyenne et l'écart-type d'une liste `L`. *A écrire...*
Lequel de ces deux résultats vous semble le plus probable lorsque $p = 0.4$? $m1 = 2.35$ et $s1 = 2.67$ ou $m2 = 14.25$ et $s2 = 3.24$? Justifier votre choix. *A écrire*

⑦ Dans le cas $p > 1/2$, la probabilité que la population s'éteigne vaut : $\dfrac{1-p}{p} = \dfrac{q}{p}$.
On en déduit que la probabilité de l'événement contraire, à savoir : « la population ne s'éteint jamais » vaut : $1 - \dfrac{q}{p}$.

Partie III : Le cas particulier $p > 1/2$

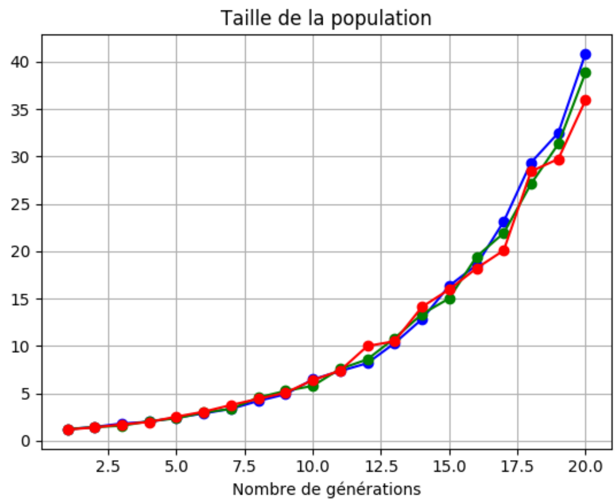
Nous nous plaçons désormais dans le cas $p > 1/2$. Sous cette condition, la probabilité que la population s'éteigne n'est plus nulle et on peut imaginer qu'elle peut converger vers un état stable ou bien tendre vers l'infini.
On donne la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

① *Écrivons une fonction python* ***tailleMoyenne(n,p,m)*** *permettant de calculer en fonction de p le nombre moyen d'individu à la génération n lors de la répétition un nombre m de fois (supposé grand)* *du processus de reproduction à partie d'une bactérie :*

```
def tailleMoyenne(p,n,m):
    # retourne la taille moyenne à la generation n
    # dans le cas où p > 1/2 (on n'est pas sûr que la population s'éteigne).
    S = 0
    for k in range(m):
       P = simulPopulation(p,n)
       S += P[-1]
    return S/m
```

En traçant les valeurs obtenues pour n allant de 1 à 20 on obtient les tailles moyennes ci-dessous. *Quelle conjecture pouvons-nous faire ?* Que la population, en moyenne tend vers l'infini à la manière de n^2...



② a) *Montrons que $g_{X_1} = f$:*
Puisque $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$, on a par définition,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_{X_1}(t) = \mathbb{P}(X_1 = 0)t^0 + \mathbb{P}(X_1 = 2)t^2 = 1 - p + pt^2 = f(t)$$

Conclusion : $\boxed{g_{X_1} = f}$

On en déduit que $\boxed{g'_{X_1}(1) = f'(1) = 2p}$.

b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons $X_n(\Omega)$:*

➢ A la génération 1 nous venons de voir que $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$.
A la génération 2, il y a quatre possibilités :
– les deux cellules filles meurent avant de se reproduire et alors $(X_2 = 0)$ est réalisé.
– L'une seulement des deux cellules se reproduit avant de mourir et $(X_2 = 2)$ est réalisé.
– Les deux cellules filles se reproduisent et $(X_2 = 4)$ est réalisé.
donc $X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}$.

A la génération 3, on trouve par le même raisonnement que $X_3(\Omega) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

➣ Supposons que $X_n(\Omega) = \{0, 2, \cdots, 2^n\} = \{2j, 0 \leq j \leq 2^{n-1}\}$ pour n fixé, $n \geq 1$.

➣ alors, à la génération $n+1$, il y aura aucune bactéries s'il n'y en avait déjà plus à la génération précédente et sinon, chacune des $2j$ bactéries de la génération n peut se reproduire et donner naissance à 2 cellules filles, soit mourir sans se reproduire.
Il y aura donc au maximum $2 * (2^n) = 2^{n+1}$ bactéries à la génération $n + 1$ et chaque valeur paire comprise entre 0 et 2^{n+1} peut être atteinte.

➣ ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\Omega) = \{2j, 0 \leq j \leq 2^{n-1}\}}$

Justifions la dérivabilité de g_{X_n} et déterminons $g'_{X_n}(1)$?
Par définition : $g_{X_n}(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = k)t^k$ donc, d'après ce qui précède :

$$g_{X_n}(t) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = 2j)t^{2j}$$

g_{X_n} est donc un polynôme de degré $2n$ à coefficients réels.
Ce qui justifie sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs :

$$g'_{X_n}(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(X_n = k)t^{k-1}$$

D'où

$$\boxed{g'_{X_n}(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(X_n = k)1^{k-1} = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n)}$$

Remarque : Ce résultat est d'ailleurs validé par la réponse à la question 7.a) puisque $\mathbb{E}(X_1) = 2p$.

③ *Montrons que $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) = 0$ si j impair ou k impair et que, sinon :*

$$\mathbb{P}_{(X_n=2j)}(X_{n+1} = 2k) = \binom{2j}{k} p^k q^{2j-k} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq 2j$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n ne prend que des valeurs paires, il découle immédiatement que $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) = 0$ si j impair ou k impair.
Sinon, sachant qu'à la génération n il y a $2j$ bactéries, le nombre de bactéries à la génération $n + 1$ découle du nombre de bactéries qui se sont dédoublées à la génération précédente. Il s'agit de $2j$ épreuves de Bernoulli indépendantes (puisque les reproductions sont indépendantes) de même probabilité de succès « se reproduire » égale à p.
Or, $(X_{n+1} = 2k)$ est réalisé signifie que k bactéries de la génération précédente se sont reproduites tandis que les autres sont mortes avant de pouvoir le faire. Donc, sachant que $(X_n = 2j)$ est réalisé, $(X_{n+1} = 2k)$ dénombre k succès au cours de $2j$ épreuves de Bernoulli indépendantes.
Il s'agit du modèle d'une loi binomiale.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}_{(X_n=2j)}(X_{n+1} = 2k) = \binom{2j}{k} p^k q^{2j-k},\ \forall 0 \leq k \leq 2j}$

Remarque : Il est par ailleurs clair que $(X_{n+1} = 2k) = \emptyset$ si $k > 2j$.

④ *Déduisons-en que $g_{X_{n+1}}(t) = g_{X_n}(g_{X_1}(t))$ et montrons que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_1)$:*

On a par définition : $g_{X_{n+1}}(t) = \sum_{i \in X_{n+1}(\Omega)} \mathbb{P}(X_{n+1} = i)t^i = \sum_{k=0}^{2^n} \mathbb{P}(X_{n+1} = 2k)t^{2k}$.

Or, d'après la formule des probabilités totales, sachant que $\{(X_n = 2j), 0 \leq j \leq 2^{n-1}\}$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2k) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}_{(X_n=2j)}(X_{n+1} = 2k)\mathbb{P}(X_n = 2j)$$

d'où, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
g_{X_{n+1}}(t) &= \sum_{k=0}^{2j} \sum_{j=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}_{(X_n=2j)}(X_{n+1} = 2k)\mathbb{P}(X_n = 2j)t^{2k} \\
&= \sum_{j=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = 2j) \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} p^k q^{2j-k} t^{2k} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = 2j) \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} (pt^2)^k q^{2j-k} \\
&= \sum_{j=0}^{2^{n-1}} \mathbb{P}(X_n = 2j)(pt^2 + q)^{2j} \\
&= g_{X_n}\left(pt^2 + q\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 7.a) : $g_{X_1}(t) = pt^2 + q$.

Conclusion : $\boxed{g_{X_{n+1}}(t) = g_{X_n}(g_{X_1}(t))}$

Par ailleurs, à la question 7.b) nous avons obtenu que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = g'_{X_{n+1}}(1)$.
Par dérivation d'une fonction composée, nous pouvons écrire :

$$g'_{X_{n+1}}(t) = g'_{X_1}(t) \cdot g'_{X_n}\left(g_{X_1}(t)\right) \Rightarrow g'_{X_{n+1}}(1) = g'_{X_1}(1) \cdot g'_{X_n}\left(g_{X_1}(1)\right)$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_1)}$

⑤ *Concluons sur l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*
D'après ce qui précède, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = (2p) \cdot \mathbb{E}(X_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison $q = 2p$ et de premier terme $\mathbb{E}(X_0) = 1$ (puisque $X = 0$ est la variable aléatoire certaine égale à 1...)

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_n) = (2p)^n}$

Nous avons désormais une bonne idée du comportement de la population bactérienne dans les cas où elle ne s'éteint pas. Sa croissance est exponentielle et en particulier, dans le modèle qui nous est proposé (dit de Galton et Watson) la population ne peut pas tendre vers un état stable !