3 T.D.3 Dénombrements

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ;
Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont il faut connaître les techniques ;
Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou de l'agro.

Les objectifs : Cardinal d'une union (disjointe ou pas) ; Cardinal d'un produit cartésien, des p-listes, des p-listes sans répétition, des permutations et des p-combinaisons d'un ensemble E à n éléments.
Capacités : Modéliser une situation combinatoire au moyen d'un vocabulaire précis ; mener un calcul de dénombrement ;

Exercice 1 ✶ :

Un codon peut-être considéré comme un mot de trois lettres prises dans un alphabet de quatre lettres ($\mathcal{A} = \{A, C, G, T\}$). Déterminer le nombre de codons :

① en tout.

② ayant ses lettres deux à deux distinctes.

③ ayant exactement deux lettres identiques.

④ commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

⑤ contenant deux consonnes identiques et une voyelle.

⑥ contenant au moins une consonne, contenant au moins une consonne et une voyelle.

Exercice 2 ❤ : Tirages avec et sans remise

I/ On extrait successivement n boules **avec remise** d'une urne U.

① On suppose cette urne U composée de N boules de deux couleurs différentes c_1 et c_2 (supposées numérotées). On note p_1 et p_2 les proportions respectives de boules de couleur c_1 et c_2.

- **a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **b.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1 puis r_2 boules de couleur c_2 ?
- **c.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1 ?

② L'urne U est cette fois composée de N boules de trois couleurs distinctes notées c_1, c_2 et c_3 dans les proportions respectives p_1, p_2 et p_3.

- **a.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1, r_2 boules de couleur c_2 puis r_3 boules de couleur c_3 dans cet ordre ?
- **b.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1, r_2 boules de couleur c_2 et r_3 boules de couleur c_3 ?

II/ On extrait **par poignée** n boules d'une urne U.
On suppose cette urne U composée de N boules (éventuellement numérotées) de deux couleurs différentes c_1 et c_2 dans les proportions respectives p_1 et p_2.

① Combien y a-t-il de tirages possibles ?

② Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1 ?

③ Répondre à nouveau à ces deux questions si les tirages ont lieu successivement sans remise.

III/ Modélisation.

On travaillera avec la bibliothèque `random`.
On précise que `randint(start,stop)` de la bibliothèque `random` fournit un nombre entier aléatoire compris entre `start` et `stop` (ces deux valeurs étant incluses) et que `random()` fournit un nombre réel aléatoire compris dans l'intervalle $[0, 1[$.

① Lancers d'une pièce de monnaie.

a. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Écrire une fonction qui simule cette expérience aléatoire et retourne une liste formée de 1 si « Pile » est obtenu, de 0 sinon. Modifier votre fonction pour obtenir le nombre de « Pile » obtenus au cours de ces n lancers.

b. Proposer une fonction permettant de simuler m expériences (avec m grand) telle que celle décrite ci-dessus et retournant la fréquence d'apparition des « Pile » au cours de n lancers.

② Tirages avec remise.

a. *Version 1 :* On effectue n tirages avec remise dans une urne composée de 7 boules blanches et 3 boules noires. Écrire une fonction `tirageARv1.py` qui utilise la fonction `randint()` et simule cette expérience aléatoire en retourne une liste formée de 1 à chaque fois qu'une boules blanches est tirée, 0 sinon.

b. *Version 2 :* Une urne est composée de boules blanches en proportion p_1 $(0 < p_1 < 1)$. On effectue n tirages avec remise dans cette urne. Écrire une fonction `tirageARv2.py` dont les paramètres d'entrée sont p_1 et n, qui utilise cette fois la fonction `random()` et qui modélise sous forme de liste le résultats de ce tirage.

c. Proposer une fonction Python `freqBoulesBlanches(m,n,p)` permettant de simuler m expériences (avec m grand) telles que celle décrite ci-dessus et retournant la fréquence d'apparition de k boules blanches pour $k \in [\![0, n]\!]$.

d. On suppose cette fois l'urne composée de N boules de trois couleurs distinctes. Proposer une fonction `tirageAR-3C.py` qui modélise sous forme de liste n tirages avec remise dans cette urne.

③ Tirages sans remise.

a. Compléter la fonction `tirageSR.py` afin de modéliser un tirage successif sans remise de n boules dans une urne composée de N boules dont un proportion p_1 est blanche.

b. Compléter la fonction `freqB-tirageAR.py` qui simule la réalisation de 1000 tirages avec remise de n boules dans une urne composée d'une proportion p_1 de boules blanches et qui retourne un tableau de 2 lignes, $n + 1$ colonnes, formé sur la première ligne du nombre de boules blanches possibles et sur la seconde des fréquences respectives du nombre de boules blanches obtenues au cours des 1000 tirages.

④ Faire le lien entre ces différentes modélisations et les réponses obtenues dans les parties I/ et II/.

Exercice 3 : Répartition de six boules dans trois urnes

On dispose de trois urnes notées A, B et C et de six boules numérotées de 1 à 6. On répartit les six boules dans les trois urnes (chaque urne peut contenir de 0 à 6 boules). Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A, B et C. Par exemple, une répartition possible est $(2, 4, 0)$, indiquant que l'urne A contient 2 boules, l'urne B contient 4 boules et l'urne C est vide.

① Écrire une fonction Python simulant une telle répartition et retournant une 3-liste.

② Écrire une fonction Python permettant de retourner la fréquence des répartitions pour lesquelles l'urne A est vide lors de n réalisations indépendantes de cette expérience aléatoire.

③ *Approche mathématique :* Déterminer le nombre de répartitions :

a. en tout
b. telles que l'urne A soit vide
c. telles que l'urne A soit vide et soit la seule urne vide
d. telles qu'une urne soit vide et une seulement.

Exercice 4 ❤ : Obtention de formules combinatoires

I/ Formule de Pascal.
On suppose un ensemble E de cardinal n. Soit $a \in E$. On prélève p éléments de E. En mettant en évidence une partition de l'ensemble des tirages possibles, retrouver la formule de Pascal.

II/ Formule du binôme de Newton.
On considère une urne U composé de $N = a + b$ boules dont a sont blanches. On effectue n tirages successifs avec remise.

1 Déterminer le cardinal des tirages possibles.

2 Soit T_k l'événement : « k boules sont blanches parmi les n boules tirées ». Déterminer $\mathrm{Card}(T_k)$ en précisant les valeurs de k.

3 Mettre en évidence une partition de Ω et conclure sur la formule du Binôme de Newton.

III/ Formule $\displaystyle\sum_{k=a}^{n} \binom{k}{a} = \binom{n+1}{a+1} = S.$

1 *Démonstration combinatoire.* On considère une urne U contenant $n+1$ boules dont b sont noires et $a + 1$ sont blanches. On extrait les boules une à une jusqu'à vider l'urne.

a. Combien de tirages différents sont possibles ?
b. Soit M_k l'événement : « La dernière boule blanche occupe la $(k+1)$-ième place ». Déterminer $\text{Card}(M_k)$ pour des valeurs de k qu'on précisera.
c. En déduire la formule annoncée.

Exercice 5 ✶✶✶ : Nombre de p- partitions d'un ensemble à n éléments

Pour tout couple $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on appelle p-partition de $[\![1,n]\!]$ toute partition P de $[\![1,n]\!]$ telle que $\text{Card}(P) = p$.
Par exemple $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5,6\}\}$ est une 3-partition de $[\![1,6]\!]$.
On note $P_{n,p}$ le nombre de p-partitions de $[\![1,n]\!]$.

① Montrer que

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P_{n+1,p+1} = P_{n,p} + (p+1)P_{n,p+1}$$

② Déterminer $P_{n,1}$ et $P_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

③ En déduire les valeurs de $P_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in [\![1,5]\!]^2$.

④ Écrire une fonction Python permettant de faire le calcul de $P_{n,p}$ pour toutes valeurs n et p de votre choix.

⑤ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1,2} = 2^n - 1,\ P_{n+1,3} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2} \text{ et } P_{n+1,n} = \binom{n+1}{2}$$