2 T.D.2 Fonctions

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ;
Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont il faut connaître les techniques ;
Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou de l'agro.

⚠ *Les objectifs* : Reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien (ln), fonctions exponentielle $x \longmapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, fonction logarithme décimal (log), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, fonctions circulaires, partie entière ($\lfloor\cdot\rfloor$) et valeur absolue ($|\cdot|$).
Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions $\sqrt[n]{}$ et arctan). Résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.
Dérivation : Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, recherche d'extremum, dérivées d'ordre supérieur.
Développements limités (développements usuels : *exp*, *cos*, *sin*, $x \longmapsto 1/(1+x)$, $x \longmapsto ln(1+x)$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$). Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées.

Exercice 1 ✶ : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

$$a)\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4};\qquad b)\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x;\qquad c)\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x^2}}$$

$$d)\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sin\frac{1}{x}\right)e^{\cos x};\qquad e)\lim_{x\to a}\frac{\arctan x-\arctan a}{e^x-e^a};$$

$$f)\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x(1-\cos x)}{x^3\ln(1+x)};\qquad g)\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\tan x;\qquad h)\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}$$

$$i)\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x};\qquad j)\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x}\left(\arctan\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)$$

✐ On montrera, avant de déterminer la dernière limite, que :

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\pi/2 & \text{si } x>0\\ -\pi/2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Exercice 2 ✶ : Limite et monotonie.

Soit f, une fonction définie et croissante sur $]0,1]$ telle que :

$$\exists a \in]0,1[/\forall x \in]0,1], f(x) = f(ax)$$

① Montrer que pour tout n entier naturel : $f(a^n) = f(1)$.

② Que vaut $\underset{n\to\infty}{lim}\, a^n$? Exprimer analytiquement ce résultat.

③ En déduire que f est une fonction constante sur $]0,1]$.

Exercice 3 ✶ : Continuité

Soit f une application continue sur $I = [0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
Pour tout n entier naturel non nul, on souhaite montrer que l'équation $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$ admet au moins une solution sur I.
Soit g définie sur I par $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$.
Montrer que le calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ permet de conclure.

Exercice 4 ✶✶✶ : Continuité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = ne^{-x} - x$$

① Montrer que f_n s'annule en un unique point x_n et que $x_n > 0$.

② Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

③ Montrer que : $\underset{n\to\infty}{lim}\, x_n = +\infty$ et $\underset{n\to\infty}{lim}\, \dfrac{x_n}{\ln n} = 1$

...D'après Agro-véto 2003

Exercice 5 ❤ : Continuité et dérivabilité

Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

① $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

② $g(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{2}{\ln x}\right)$

Exercice 6 ✶ : Dérivabilité des fonctions suivantes

$f_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin\sqrt{x}}{1-\sin\sqrt{x}}}$; $\quad f_2 : x \mapsto \tan^4(x^4+1)$; $\quad f_3 : x \mapsto \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $\quad f_4 : x \longmapsto 2x - \sin 2x$

$f_5 : x \mapsto \sin\dfrac{1}{1-2x}$; $\quad f_6 : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x-1}}{(x-2)^2}$; $\quad f_7 : x \mapsto \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\quad f_8 : x \longmapsto \ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 7 ✶ : Rolle et Théorème des accroissements finis

① **a.** Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ 1+x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

b. En déduire la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{kn} \frac{1}{p}$ où k est un entier naturel non nul fixé.

② Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$. Montrer que, s'il existe trois points de la courbe de f qui sont alignés, alors f'' s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

Exercice 8 ✶✶ : Dérivées de fonctions réciproques

① Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $I = [0,\pi]$ dans $[-1,1]$.
On note A la réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle I.

② Déterminer $A(0)$, $A(-1/2)$ et $A(\sqrt{3}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

④ Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\sin(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

⑥ **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

b. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de A.

...Inspiré d'Agro-véto 2015

Exercice 9 ✶ : Développements limités

Déterminer les développements limités suivants :

1) $\dfrac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 ; $\quad$ 2) $e^x\dfrac{\sin x}{x}$ à l'ordre 3 en 0 ; $\quad$ 3) $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0

4) $(1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 en 0 ; $\quad$ 5) $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ à l'ordre n en 0 $\quad$ 6) $\dfrac{\ln x}{x^2}$ à l'ordre 3 en 1

Exercice 10 ❤ : Développements limités et branches infinies

Déterminer le comportement asymptotique des deux fonctions ci-dessous :

$$f : x \longmapsto (x-2)e^{1/x} \text{ et } g : x \longmapsto x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Exercice 11 ✶✶✶ :

Soit n un entier naturel non nul. Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

① Calculer $f_n'(x)$ puis $f_n''(x)$. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

② **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$

b. A l'aide de l'outil informatique de votre choix, conjecturer le comportement de (u_n) et conjecturer la limite de nu_n.

③ Compléter le programme suivant pour trouver u_n avec une précision de e, valeur réelle strictement positive.

```
def f(n,x):
   f=1/(1+exp(x))+n*x
   return f

def dichotomie(n,e):
   a,b = ...
   while b-a ... :
      c = (a+b)/2
      if f(n,a)*f(n,c) ... :
         ...
      else:
         ...
   return ...
```

④ Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+}(x)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

⑤ Justifier que la suite (u_n) converge vers 0 et calculer la limite de nu_n.

⑥ Montrer que $u_n + \dfrac{1}{2n} \equiv -\dfrac{1}{8n^2}$. Le contrôler à l'aide de la fonction `dichotomie`.

...D'après Agro-véto 2015

Exercice 12 ✶✶ : Étude de fonctions

Faire une étude succincte des fonctions suivantes, de manière à pouvoir justifier rigoureusement leur allure.

① $f_1(x) = \ln\left(|\ln(|x|)|\right)$

② $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$

③ $f_3(x) = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}\sqrt{|4-x^2|}$

④ $f_4(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

⑤ $f_5(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ sur l'intervalle $]-\pi, 2\pi[$