1 T.D.1 Suites numériques

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ;
Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont il faut connaître les techniques ;
Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou de l'agro.

⚠ *Les objectifs* : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n-ième terme.
Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.
Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Croissances comparées : $a^n = \circ(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = \circ(a^n)$ (avec $\alpha > 0$)
Suites équivalentes.

Exercice 1 ✶ : Premiers termes et convergence

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les dix premiers termes et en fournir une représentation graphique en utilisant Python.
Conjecturer informatiquement leur nature (convergente ou divergente) avant de justifier si ces suites sont monotones, minorées, majorées, bornées, convergentes et, si oui, quelle est leur limite.

① Suites données sous formes explicites :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n}{2} - 2$; $v_n = \dfrac{1}{n}$; $w_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$; $x_n = \dfrac{2^n}{n^{10}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$; $b_n = sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$; $d_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$; $e_n = cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

② Faire de même avec les suites ci-dessous, données sous forme récurrente :

$u_0 = 0,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}$
$v_0 = 2,\ v_{n+1} = 2v_n - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$
$w_0 = 2\ ,w_{n+1} = \sqrt{3w_n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}$
$x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 ✶ : Les suites usuelles

① Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par leur premier terme et une relation de récurrence et indiquer leur nature :

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$, $u_0 = 1$;
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$, $v_0 = 1$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -u_n$, $u_1 = -1$;
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n/3$, $v_1 = 2$;

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n/2 + 3$, $u_0 = 5$;
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n - 1$, $v_0 = -10$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 3w_n^2$ et $w_0 = 1$ (✐ Un opération préalable est nécessaire...)

② Même questions pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrences par :

a. $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$ et $u_0 = -1$, $u_1 = 3$.
b. $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n$ et $v_0 = 5$, $v_1 = -2$.
c. $w_{n+2} = -w_{n+1} - w_n$ et $w_0 = 1$, $w_1 = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}$

Exercice 3 ✶ :

① Dans cette question, (u_n) désigne une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

a. Calculer u_0 et r sachant que $u_{99} = 100$ et $S_{99} = 10000$.
b. Le premier terme de la suite est 3 et le n-ième terme est 19. Sachant que la somme jusqu'au n-ième terme vaut 99, calculer n et la raison.

② Dans cette question, (u_n) désigne une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

a. $u_0 = 5$ et $u_5 = 160$. Calculer q et S_3.
b. $q = 1/2$ et $S_5 = 63$. Calculer u_0 et u_5.

Exercice 4 ✶✶ : Suites et sommes

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

① Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

② Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et en déduire la convergence de (u_n).

③ Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

a. Montrer par application du théorème des accroissements finis que :

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

✐ *Indication :* On pourra appliquer ce théorème à $u \longmapsto \ln(1+u)$ où $u \in \mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire que $u_n < \ln(2) < u_n + \dfrac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
✐ *Indication* On pourra penser à mettre en place des télescopages.

c. Conclure sur une fonction Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$.

④ On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}\sqrt{n+k-1}}$$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n \leq u_{n-1} + \dfrac{1}{2n-1}$

b. En déduire la convergence de la suite (v_n) et sa limite.

Exercice 5 ✶ : Suites définies par une fonction

Nous étudions les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

① Justifier graphiquement, selon la valeur de u_0, la nature de la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 2u_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

② On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in [-2, +\infty[$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

a. Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$. Étudier cette fonction et tracer son graphe.

b. Montrer que l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$ est stable par f. En déduire que la suite (u_n) est monotone et l'existence de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (✐ On ne cherchera pas à le déterminer)

c. Appliquer le théorème des accroissement finis pour montrer l'existence de $k \in]0, 1[$ tel que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$$

Conclure sur la convergence de la suite u pour toute valeur de u_0.

③ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$

a. Faire l'étude de $f : x \longmapsto \dfrac{2+x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que l'intervalle $I = [3/2; 3]$ est stable par f et en déduire l'existence de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

c. La suite (u_n) est-elle monotone ? Préciser son comportement.

d. Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{8}{9}$ et conclure que (u_n) converge vers α.

e. Majoration de l'erreur : Déterminer un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \alpha| \leq 10^{-4}$.

Exercice 6 ✶✶✶ : Suite de racines

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0,+\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

② **Modélisation :** A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.
Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python, Geogebra ou Excel. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

③ **Étude mathématique :**

a. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
En déduire la monotonie de la suite (α_n).

b. Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l.
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n).