MATHEMATIQUES
Révisions d'analyse

Exercice :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R}, a \in]0,1[\\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)\min(1, u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On souhaite écrire une fonction qui permette d'estimer son éventuelle monotonie selon les valeurs de u_0 et u_1 en préalable à une étude mathématique.

Si on ne souhaite pas faire de représentation graphique, aucune bibliothèque n'est requise.

Dans le corps de la fonction on demandera d'entrer u_0 et u_1 à l'aide de la fonction `input` puis on initialisera la liste `L` dans laquelle tous les termes de u_0 à u_n seront placés en écrivant :

`L = [u0,u1]`

Pour le calcul des termes u_2 à u_n on répétera $u_k = au_{k-1} + (1-a)\min(1, u_{k-2})$ pour k allant de 2 à n. Puisqu'on connaît le nombre de répétitions, on utilisera pour cela une boucle « Pour ».

Une solution possible est :

```
def suiteMin(n,a):
   u0 = float(input('Entrer le premier terme de la suite : '))
   u1 = float(input('Entrer le second terme de la suite : '))
   L = [u0,u1]
   for k in range(2,n+1):
      b = u0
      if u0 > 1:
         b = 1
      u2 = a+u1+(1-a)*b
      L.append(u2)
      u0 = u1
      u1 = u2
   return L
```

Problème : G2E 2010

Lu dans le rapport de jury : « *Le minimum sur les suites récurrentes n'est guère connu : sens de variation, majoration ou minoration par un nombre fixe, détermination de la limite obtenue par le point fixe de la fonction f.*
Une suite majorée par 1 et croissante ne converge pas nécessairement vers 1. Deux suites l'une décroissante, l'autre croissante, ne sont adjacentes que si leur différence tend vers 0. »

Soit t un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

1. a) *Etudions le signe de g :*
$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$.
Or, si $0 < x < 1$, $\sqrt{x} < 1$ et si $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$.

Conclusion : $\boxed{g(x) > 0 \text{ si } x \in]0,1[,\ g(x) < 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1}$

Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de candidats trouvent que g est négative sur $\mathbb{R}$. La plupart des réponses manquent de concision. Citons par exemple l'étude de la limite en $+\infty$ de la fonction g qui n'a aucun intérêt par rapport à la question posée. Trop de candidats donnent comme réponse le tableau de variation de g et semblent avoir oublié en cours de travail que c'est le signe qui devait être étudié.* »

b) *Montrons que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$* : Supposons que $t \geq 1$ et démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

i. *Initialisation* : Pour $n = 0$, $x_0 = t \geq 1$ donc $x_1 = \sqrt{x_0} \geq 1$.
Par ailleurs : $x_1 - x_0 = \sqrt{x_0} - x_0 = g(x_0) \leq 0$ d'après 1.a).
D'où $1 \leq x_1 \leq x_0$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

ii. *Hypothèse* : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n fixé ($n \geq 0$).

iii. *Hérédité* : $x_{n+1} \geq 1$ donc $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} \geq 1$.
Par ailleurs, $x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) \leq 0$ car $x_{n+1} \geq 1$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$: $1 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}$ est vraie.

iv. ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n}$

On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, minorée par 1.
Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

Déterminons sa limite qu'on note l : On a $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc en passant à la limite en l'infini et en utilisant la continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l = \sqrt{l}$$

Or

$$l = \sqrt{l} \Leftrightarrow (l^2 = l \text{ et } l \geq 0) \Leftrightarrow (l = 0 \text{ ou } l = 1).$$

Par ailleurs la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 donc $l = 0$ est impossible.

Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l = 1}$.

c) *Etudions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t<1$* : On rédige cette fois plus rapidement.
On commence par noter que si $0 < x_0 = t < 1$ alors $0 < x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ce qui est évident par récurrence puisque si $x \in]0,1[$, alors $\sqrt{x} \in]0,1[$.
L'intervalle $I =]0,1[$ est dit stable par $x \longmapsto \sqrt{x}$.
Par ailleurs cette fonction est strictement croissante sur I donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Elle est par ailleurs bornée par 0 et 1 donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.
Pour déterminer sa limite, il suffit de savoir si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît ou décroît... c'est justement ce que nous donne la question 1.a).
En effet, $x_n \in]0,1[$ donc $g(x_n) = \sqrt{x_n} - x_n > 0$. Autrement dit :

$$x_{n+1} > x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

On en déduite que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et d'après la question précédente on conclut que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *Questions très diversement traitées. Les meilleurs font une récurrence, utilisent l'étude de g pour l'initialisation, la croissance de la fonction racine pour l'hérédité et citent la continuité de cette même fonction pour conclure sur la valeur de la limite de la suite (x_n). Beaucoup de candidats semblent croire qu'une suite croissante et majorée par 1 converge vers 1.* »

On considère maintenant les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_n - 1) = 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_{n+1}^2 - 1) \\ &= 2^n\left(-x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1\right) = -2^n(x_{n+1} - 1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de candidats étudient le discriminant de l'expression $-x^2 + 2x - 1$ pour déterminer son signe* ».

3. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2^{n+1}\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n\frac{x_n - 1}{x_n} = 2^{n+1}\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n\frac{x_{n+1}^2 - 1}{x_{n+1}^2} \\ &= \frac{2^n}{x_{n+1}^2}\left(2x_{n+1}(x_{n+1} - 1) - (x_{n+1}^2 - 1)\right) = \frac{2^n}{x_{n+1}^2}(x_{n+1} - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats croient que la suite (u_n) est positive et essaient de conclure en utilisant que x_n est plus grande que 1, ce qui est faux pour $t < 1$* ».

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = 2^n(x_n - 1) - 2^n\dfrac{x_n - 1}{x_n} = 2^n\dfrac{x_n^2 - 2x_n + 1}{x_n} = 2^n\dfrac{(x_n - 1)^2}{x_n} \geq 0.$

5. *Montrons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes* :
   On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Il suffit donc de montrer qu'elle est minorée.
   Or, d'après 4. on a : $u_n \geq v_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Par ailleurs la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq v_0$.
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par v_0.

   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$. (Théorème de la limite monotone).

   Lu dans le rapport de jury : « *Les résultats précédents ne permettent pas de dire que les suites sont adjacentes. Certains candidats veulent conclure en écrivant « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minore par v_n elle est donc convergente ». L'argument correct est « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par v_0 elle est donc convergente* ».

   De même, en notant que $v_n \leq u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, on montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par u_0.
   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

6. *Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on notera L* :
   Rappelons que l'énoncé nous indique que $v_n = \dfrac{u_n}{x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Or, $\underset{n\to\infty}{lim}\, x_n = 1$ d'après la question 1. et ce pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$.
   Donc si $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = L$ alors $\underset{n\to\infty}{lim}\, v_n = \underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{u_n}{x_n} = \underset{n\to\infty}{lim}\, u_n$

   Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ont même limite notée } L}$.

   Lu dans le rapport de jury : « *On voit parfois que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2^n ou plus souvent 0 car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1* ».

7. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et toutes deux ont pour limite L.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n \leq L \leq u_n}$.

   En particulier, pour $n = 0$, on a : $v_0 \leq L \leq u_0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x_0} \leq L \leq x_0 - 1$, avec $x_0 = t$.

   Conclusion : $\boxed{1 - \dfrac{1}{t} \leq L \leq t - 1}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Question souvent bien traitée* ».

   L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t. Nous considérons donc désormais la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

8. *Écrivons une fonction Python* **`estimef(t)`** *qui retourne une valeur approchée à 10^{-3} près de L pour tout valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$:*

   Nous avons besoin, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$, de déterminer à 10^{-3} près $L = \underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = \underset{n\to\infty}{lim}\, v_n$. Pour chaque valeur de t, nous allons donc construire par récurrence une valeur approchée de L en utilisant les définitions des suites (x_n), (u_n) et (v_n).

Nous commençons par initialiser x_0 à t, u_0 à $2^0(x_0-1) = t-1$ et v_0 à $u_0/x_0 = u_0/t$.
Le nombre de répétition n'étant pas connu, nous répéterons le calcul de chacun de ces termes tant que $u_n - v_n > 1e-3$.
Dès que $u_n - v_n \leq 1e-3$ nous retournerons $(u_n + v_n)/2$ comme valeur approchée de L.

Une écriture possible de la fonction demandée est donc :

```
from math import *

def estimf(t):
   n = 0
   x = t
   u,v = t-1,u/t
   while u-v > 1e-3: # on rappelle que :vn < un, ∀n ∈ ℕ
      n += 1
      x = sqrt(x)
      u = 2**n*(x-1)
      v = u/x
   return (u+v)/2
```

Pour donner une représentation graphique de f, on importera la bibliothèque `matplotlib.pyplot` ainsi que la bibliothèque `numpy` et on écrira :

```
T = np.linspace(0.5,5,100)
Y = [estimef(t) for t in T] # liste avec les valeurs de f(t)
plt.plot(T,Y,'r-')
```

Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.

9. Il suffit de considérer l'inégalité obtenue en 7 en prenant $t = 1$. Alors $\boxed{f(1) = 0}$.

   Lu dans le rapport de jury : « *Question souvent bien traitée* ».

10. L'encadrement obtenu en 7. s'écrit désormais $1 - \dfrac{1}{t} \leq f(t) \leq t-1$ ou encore $\dfrac{t-1}{t} \leq f(t) \leq t-1$.

    Pour obtenir un encadrement de $\dfrac{f(t)}{t-1}$, il reste à diviser par $t-1 \neq 0$:

    – Si $t-1 > 0 \Leftrightarrow t > 1$ alors : $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{f(t)}{t-1} \leq 1$

    – Si $t-1 < 0 \Leftrightarrow t < 1$, alors $1 \leq \dfrac{f(t)}{t-1} \leq \dfrac{1}{t}$

    Par théorème d'encadrement des limites, on obtient : $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{f(t)}{t-1} = 1$

    On rappelant que $f(1) = 0$ d'après 8., cette limite s'écrit : $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{f(t) - f(1)}{t-1} = 1$

    Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *L'immense majorité des candidats pense à utiliser le théorème d'encadrement des limites mais oublie de séparer les cas $t > 1$ et $t < 1$* ».

11. a) On suppose $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_2 \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrons par récurrence que $\mathcal{R}_n : x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$:
   i. *Initialisation* : $\mathcal{R}_0$ est vraie car, par hypothèse, $x_0(t_1{\cdot}t_2) = t_1{\cdot}t_2$ et $x_0(t_1){\cdot}x_0(t_2) = t_1{\cdot}t_2$
   ii. *Hypothèse* : supposons $\mathcal{R}_n$ vraie pour n fixé.
   iii. *Hérédité* : $x_{n+1}(t_1 \cdot t_2) = \sqrt{x_n(t_1 \cdot t_2)}$
   et $x_{n+1}(t_1) \cdot x_{n+1}(t_2) = \sqrt{x_n(t_1)} \cdot \sqrt{x_n(t_2)} = \sqrt{x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)}$
   Donc, par hypothèse de récurrence, $x_{n+1}(t_1 \cdot t_2) = x_{n+1}(t_1) \cdot x_{n+1}(t_2)$
   iv. ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats ne voient pas qu'il faut faire une récurrence.* »

b) On revient à la définition de $u_n(t)$:

$$\begin{aligned} u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) &= 2^n\left(x_n(t_1 \cdot t_2) - 1\right) - 2^n\left(x_n(t_1) - 1\right) - 2^n\left(x_n(t_2) - 1\right) \\ &= 2^n\left(x_n(t_1 \cdot t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1\right) \\ &= 2^n\left(x_n(t_1) \cdot x_n(t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1\right) \\ &= 2^n\left(x_n(t_1) - 1\right) \cdot \left(x_n(t_2) - 1\right) \\ &= 2^n \frac{u_n(t_1)}{2^n} \cdot \frac{u_n(t_2)}{2^n} = \frac{u_n(t_1) \cdot u_n(t_2)}{2^n} \end{aligned}$$

Or on a vu en 5. que les suites $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent pour toutes valeurs de t dans $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \left(u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)\right) = 0}$

Lu dans le rapport de jury : « *Rarement bien traitée, principalement parce que la forme indéterminée $2^n x_n$ n'est pas vue.* »

c) Par définition de f : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(t_1 \cdot t_2) = f(t_1 \cdot t_2)$, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(t_1) = f(t_1)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(t_2) = f(t_2)$.

Conclusion : $\boxed{f(t_1 \cdot t_2) = f(t_1) + f(t_2)}$.

12. a) Utilisons l'égalité qui précède en notant que si $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+$, alors $1 + \dfrac{h}{t} \in \mathbb{R}_+$ et :

$$f(t) + f\left(1 + \frac{h}{t}\right) = f\left(t \cdot \left(1 + \frac{h}{t}\right)\right) = f(t + h)$$

Conclusion : $\boxed{f(t + h) - f(t) = f\left(1 + \dfrac{h}{t}\right)}$

Lu dans le rapport de jury : « *Assez peu traitée* ».

b) Nous savons que $f(1) = 0$ d'après 8. et $f'(1) = 1$ d'après 9. f est dérivable en 1 et à ce titre elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 qui vaut :

$$f(x) \underset{1}{=} f(1) + (x - 1)f'(1) + o(x - 1) \underset{1}{=} x - 1 + o(x - 1)$$

En posant $x = 1 + \frac{h}{t}$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et h au voisinage de 0, on a $1 + \frac{h}{t}$ au voisinage de 0 et :

$$f\left(1 + \frac{h}{t}\right) \underset{0}{=} \frac{h}{t} + o(h)$$

En utilisant la relation obtenue en 11.a) on en déduit :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \underset{0}{=} \frac{1}{t} + o(1)$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en tout } t \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } f'(t) = \frac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*}$

c) D'après ce qui précède, on en déduit que f est une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $\exists c \in \mathbb{R} / f(t) = lnt + c, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$.
Or on rappelle que $f(1) = 0$ (question 8.) donc $c = 0$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est la fonction } ln}$

13. On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ avec $x_0 = t$.
On a : $x_1 = \sqrt{t} = t^{1/2}$, $x_2 = \sqrt{x_1} = t^{1/4}$.
Par récurrence, on montre facilement que $x_n(t) = t^{\frac{1}{2^n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc $u_n(t) = 2^n \left(t^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) = 2^n \left(e^{\frac{lnt}{2^n}} - 1\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Or $\underset{n\to\infty}{lim} \frac{lnt}{2^n} = 0$ donc, par utilisation des équivalents : $u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \frac{lnt}{2^n} = lnt$
Conclusion : $\boxed{f(t) = lnt, \forall t \in \mathbb{R}_+^*}$

Lu dans le rapport de jury : « *Seuls les meilleurs candidats ont traité cette question* ».