Devoir surveillé 1 : Suites numériques et fonctions

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème. Dans ce dernier, les questions ne sont pas de difficultés croissantes et on prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer. On pourra, à titre indicatif, consacrer 15 mn à l'exercice et 75 mn au problème.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé au cours de l'épreuve.

Exercice :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R}, a \in]0,1[\\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)\min(1, u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On souhaite pouvoir estimer son éventuelle convergence. Écrire une fonction Python `suiteMin(n,a)` qui retourne sous forme de liste l'ensemble des termes u_0 à u_n. Les premiers termes u_0 et u_1 seront demandés à l'utilisateur dans le corps de la fonction.
Remarque : Préciser si nécessaire la ou les bibliothèques utilisées et on s'interdira l'emploi de la fonction `min()` de Python.
N. B. : Aucune étude de la suite (u_n) n'est demandée.

Problème : G2E 2010

Soit t un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

1. a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g : x \longmapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de g.
   b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   c) Etudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$.

   On considère également les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}$$

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1}. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer de même le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

6. Déduire alors de la question 1. que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on notera L.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n. En déduire que pour tout réel t strictement positif, on a :
$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1$$
L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t.
Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

8. Écrire une fonction Python `estimef(t)` qui retourne une valeur approchée à 10^{-3} près de L pour tout valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Indiquer comment tracer le graphe de cette fonction sur l'intervalle $[0.1, 5]$ grâce à Python.

   Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.

9. Déterminer $f(1)$.

10. Déterminer par encadrement :
$$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{t-1}$$
En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

11. a) Montrer que :
$$\forall t_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)$$
    b) En déduire :
$$\lim_{n\to\infty} (u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2))$$
    c) Donner une relation entre $f(t_1 \cdot t_2)$, $f(t_1)$ et $f(t_2)$.

12. a) Montrer que, pour tout t réel strictement positif et tout réel h tel que $t+h$ soit strictement positif, on a :
$$f(t+h) - f(t) = f\left(1 + \frac{h}{t}\right)$$
    b) Donner un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 1. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

    c) En justifiant votre réponse, exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles. Donner alors le moyen de valider l'estimation de f proposée à la question8.

13. Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n(t) = t^{\frac{1}{2^n}}$. Retrouver alors directement le résultat de 11.c).

- FIN -