# Devoir maison 1 : Suites numériques

## Problème : Approximation de $\sqrt{2}$ par l'algorithme de Babylone

Cette méthode a été proposée, sur la base d'une figure géométrique, par Héron d'Alexandrie, au premier siècle de notre ère.
Supposons un rectangle $R_0$ de longueur $a_0$ et de largeur $b_0$ de surface égale à 2 (on pourra prendre $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$).
Calculer $\sqrt{2}$ revient à chercher la solution positive de l'équation $x^2 = 2$ et donc à déterminer la longueur du côté d'un carré de surface égale à 2...
L'idée élaborée par Héron d'Alexandrie consiste à passer pas à pas du rectangle de départ au carré cherché en construisant des rectangles intermédiaires $R_n$ de longueur $a_n$ et largeur $b_n$ tels que :

- Pour tout entier $n \geq 0$, $a_n \cdot b_n = 2$
- Pour tout entier $n \geq 0$, la longueur du rectangle $R_{n+1}$ se déduit du rectangle $R_n$ par la relation

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

① Justifier la construction avec Géogebra ci-dessous de deux rectangles successifs :

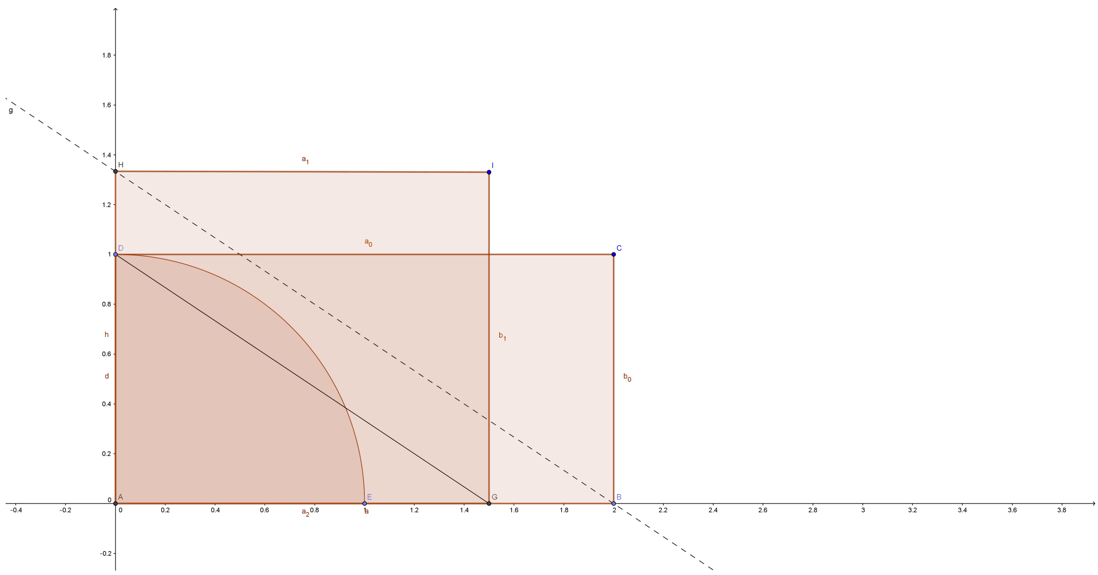

FIGURE 1 – `Algorithme de Babylone`

② Justification de l'algorithme d'Héron.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n < a_n$.
b) Montrer que $(a_n)$ est une suite monotone, strictement décroissante.
c) Montrer que $(b_n)$ est une suite monotone, strictement croissante.
d) En déduire que $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers une même limite $L$ qu'on déterminera.

③ Écrire une fonction Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-8}$ près.

④ On ne considère cette fois que la suite définie par $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$.

a) Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ et donner son allure sur $R_+^*$.

b) Déterminer un intervalle stable par $f$ et en déduire la convergence de la suite $(a_n)$ vers $\sqrt{2}$.

c) Montrer en appliquant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel $k$, $0 \leq k < 1$, tel que

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq k|a_n - \sqrt{2}|, \ \forall n \geq 0$$

Conclure que pour $a_0 = 2$, $|a_n - \sqrt{2}| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n (2 - \sqrt{2})$ $\forall n \geq 0$ et en déduire un rang $n_0$ à partir duquel $a_n$ fournit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-2}$ près.

d) Valider votre réponse à l'aide d'un tableur de votre choix et d'un programme Python.