1 Plan d'étude des suites récurrentes réelles

Soit f, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. L'objectif est l'étude d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Les grandes étapes :

① **Étude de la fonction** f : A mener de façon suffisamment complète pour en donner une représentation graphique précise dans un repère orthonormé. Tracer dans ce repère la première bissectrice Δ d'équation $y = x$.
Placer ensuite le point $A_0(u_0, f(u_0))$ et $B_0(u_1, u_1)$ et poursuivre la formation des termes de la suite en plaçant à l'étape k le point $A_k(u_k, f(uk))$ et B_k qui est le point d'intersection de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par A_k et Δ (les coordonnées de B_k sont (u_{k+1}, u_{k+1})).

② **Détermination d'un intervalle** I **stable par** f **contenant** u_0. Autrement dit :

$$u_0 \in I \text{ et } f(I) \subset I$$

✐ C'est une étape essentielle car elle permet d'établir par récurrence que la suite est bien définie et que **tous ses termes** u_n sont dans I. Si I est un intervalle fermé borné, cette étape permet de montrer que (u_n) est **bornée**. Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'elle est monotone pour montrer qu'elle converge !

Dans tous les cas, il est préférable de **choisir un intervalle sur lequel** f **est monotone** !

③ **Étude de la monotonie de la suite** (u_n) **:** Elle découle immédiatement de l'étude de f.

On retiendra deux cas :

- Si f est **croissante** sur I défini en 2), alors la suite (u_n) est **monotone** [résultat à démontrer par récurrence -. cf 2. Résultats utiles].
  Conséquence : Si (u_n) est bornée alors elle converge.
  On peut étudier son sens de variation : il suffit de déterminer le signe de $u_1 - u_0$ (ou $u_2 - u_1$) ou bien d'étudier sur I le signe de $g(x) = f(x) - x$ qui est indiqué par la position relative de la courbe représentant f et la droite d'équation $(y = x)$ [D'où l'importance d'un graphe précis !].

- Si f est **décroissante** sur I alors (u_n) est alternée, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposée [cf 2. théorème 1]

④ **Déterminer les seules limites possible** :

Si (u_n) converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \alpha$ et donc $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$ si f continue en α.
✐ On insistera sur la **continuité** de f en α car dire que $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\alpha)$ équivaut à assurer que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$. Autrement dit, à assurer la continuité de f en α.
✐ Si l'équation $f(x) = x$ est impossible à résoudre, on pourra montrer l'existence de α tel que $g(\alpha) = 0$ où $g : x \longmapsto f(x) - x$ en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires (là encore la **continuité** de f, et donc de g, est indispensable - penser par exemple à appliquer le théorème 2 : intervalle stable et point fixe, rappelé ci-dessous et utilisé en 3. *Un exemple d'application*).

⑤ **Étude de la convergence :**

- Si f est croissante sur un intervalle stable I fermé borné et que $u_0 \in I$, alors la suite est **monotone** et **bornée**, elle **converge**.

- Si f est croissante sur un intervalle stable de la forme $I_1 =]-\infty, \alpha]$ où α est un point fixe de f et que $u_0 \in I$ alors la suite est **monotone**.
  - Si $u_0 = \alpha$, c'est fini. La suite (u_n) est constante égale à α.
  - Si sur I_1 la courbe de f est au-dessus de la droite $(y = x)$ alors (u_n) est croissante et majorée. **Elle converge**.
  - Si sur I_1, la courbe de f est sous la droite $(y = x)$ alors (u_n) est décroissante de limite infinie. On raisonnera par l'absurde en montrant que la seule limite possible α obtenue au paragraphe précédent ne peut convenir (en effet $u_0 \neq \alpha$ et $u_0 \in I_1 \Rightarrow u_0 < \alpha$ et donc $u_n \leq u_0 < \alpha$ puisque (u_n) est décroissante. Ce qui impose $\lim_{n\to\infty} u_n \leq u_0 < \alpha$. Absurde...). **La suite (u_n) diverge**.

- Si f est croissante sur un intervalle stable de la forme $I_2 = [\alpha, +\infty[$ où α est un point fixe de f et que $u_0 \in I$, alors la suite est **monotone**.
  - Si $u_0 = \alpha$, c'est fini. La suite (u_n) est constante égale à α.
  - Si sur I_2 la courbe de f est au-dessus de la droite $(y = x)$ alors (u_n) est croissante et de limite infinie (raisonner par l'absurde). **Elle diverge**.
  - Si sur I_2, la courbe de f est sous la droite $(y = x)$ alors (u_n) est décroissante et minorée. **La suite (u_n) converge**.

- Si f est décroissante sur un intervalle stable comprenant le premier terme de la suite, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont **monotones** et de sens de variations contraires, on dira que (u_n) converge si ces deux suites convergent vers la même limite [démonstration à savoir refaire].
  ✐ On peut aussi utiliser le théorème du point fixe qui s'appuie sur le théorème des accroissements finis comme cela est fait en 3. *Un exemple d'application.*

- Si f **n'est pas monotone sur un intervalle stable** et qu'on veut montrer la **convergence** de (u_n), le seul recours est d'utiliser le *Théorème des accroissements finis* et de montrer que la dérivée est majorée par 1 en valeur absolue sur l'intervalle I (« Théorème du point fixe ».)
  ✐ Cette méthode offre l'avantage de proposer une majoration de la distance entre u_n et sa limite...

2 Les résultats utiles

Théorèmes

1. Monotonie des suites récurrentes

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$ avec $f(I) \subset I$, alors :

- *Si f est croissante, alors (un) est monotone.*
- *Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.*

Démonstration

monotonie

Si f est croissante *: Pour tout n entier naturel, le signe de $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est le même que celui de $u_{n+1} - u_n$ puisque f est croissante.*
Par une récurrence immédiate, on montrer que $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $u_1 - u_0$. Ce qui assure la monotonie de u.

Si f est décroissante *: Pour tout n entier naturel,*

$$u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \text{ et } u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$$

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vérifient donc la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g = f \circ f$ est croissante par composition de deux fonctions décroissantes.
Ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, le sens de variation étant donné par le signe de $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$.
Or $(u_3 - u_1)(u_2 - u_0) = (f(u_2) - f(u_0))(u_2 - u_0) \leq 0$ puisque f est décroissante. □

Théorèmes

2. Intervalle stable et point fixe

Si f est continue sur I, intervalle fermé tel que $f(I) \subset I$, alors f admet un point fixe sur I.

Démonstration

Intervalle stable et point fixe

Ce résultat s'obtient par application du théorème des valeurs intermédiaires.
Supposons $I = [m, M]$. Alors $f(m) \geq m$ et $f(M) \leq M$ puisque $f(I) \subset I$.
D'où $g(m) \geq 0$ et $g(M) \leq 0$ où $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur I. □

Remarque

Si f est croissante et $\alpha \in I$ est un point fixe de f, alors les intervalles $I_1 = I \cap]-\infty, \alpha]$ et $I_2 = I \cap [\alpha, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.
Ce résultat est particulièrement utile pour obtenir une majoration ou une minoration de u_n. Par exemple, si $u_0 \in I_1$ alors par une récurrence immédiate, $u_n \in I_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc majorée...

Théorèmes

3. Théorème du point fixe

Soit (u_n) *une suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$ *avec* $f(I) \subset I$ *et* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.
Si : $\exists \alpha \in I / f(\alpha) = \alpha$ *et* $\sup\limits_{t \in I} |f'(t)| < 1$ *alors*

$$(u_n) \textit{ converge vers } \alpha.$$

Démonstration

Théorème du point fixe

Posons $k = \sup\limits_{x \in I} |f'(t)|$. *Par application du théorème des accroissements finis appliqué à* f *sur* I *(rappelons que* $u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$*) :*

$$\exists c \in]\alpha, u_n[/ u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha) = f'(c)(u_n - \alpha)$$

On en déduit que pour tout n *entier naturel :*

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$$

Par une récurrence immédiate : $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$
Or $|k| < 1$ *donc* $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - \alpha) = 0$ *ce qui assure que* (u_n) *converge vers* α

3 Un exemple d'application :

Résolution d'une équation par méthode numérique.

On cherche à résoudre l'équation $x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln(x) = 0$.

Montrer que l'étude de la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{2}\ln(u_n)$, $u_0 = \dfrac{3}{2}$ permet d'obtenir une approximation numérique de la solution.