

L'algorithme de dichotomie repose sur l'application du théorème des valeurs intermédiaires strict qui assure :

### Théorèmes

#### 1. Théorème des valeurs intermédiaires strict

Soit  $f$  une fonction d'une variable réelle continue sur  $[a, b]$ ,  $a < b$ , strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Si  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , alors :

$$\exists ! \alpha \in [a, b] / f(\alpha) = 0$$

**Raisonnement :** Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer que  $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ .

**Principe de l'algorithme :** Il consiste à construire par récurrence deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  qui sont adjacentes et vérifient :  $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- *Initialisation :* On pose  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ . On a bien  $a_0 \leq b_0$  et  $f(a_0) \leq 0 \leq f(b_0)$ .
- *Hypothèse de récurrence :* Pour  $n$  fixé ( $n \in \mathbb{N}$ ), on suppose construits les termes  $a_n$  et  $b_n$  tels que :

$$a_n \leq b_n \text{ et } f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

- *Hérédité :* Prenons  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

- Si  $f(c_n) \geq 0$ , alors on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$ . On note que :
- Si  $f(c_n) < 0$ , alors on pose  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ .  $a_{n+1} \leq b_{n+1}$

On a réduit l'intervalle entre  $a_n$  et  $b_n$ . D'où  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  et donc :

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

*Rq :* Nous sommes en train de construire une suite  $(a_n)$  **croissante** et une suite  $(b_n)$  **décroissante**. Par ailleurs, par construction de  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$ , on a bien

$$f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1})$$

*En effet :*  $f(a_{n+1})$  vaut soit  $f(a_n)$  qui était négatif par hypothèse de récurrence, soit  $f(c_n)$  dans le cas où  $f(c_n) < 0$ . De même pour  $f(b_{n+1})$ ...

- *conclusion :* En notant qu'à chaque étape la longueur de l'intervalle est divisée par deux, on obtient :

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

Si on rappelle que  $(a_n)$  est croissante et  $(b_n)$  est décroissante, on a donc bien construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  adjacentes vérifiant  $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Conséquence :** Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une même limite  $l \in \mathbb{R}$ . Et comme  $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ , on a par passage à la limite et par continuité de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(l) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(l)$$

Soit :  $f(l) \leq 0 \leq f(l)$ . **Conclusion :**  $f(l) = 0$